مقدمة في
القياس الاقتصادي

مقدمة في

القياس الاقتصادي

تأليف

أ.د. أموري هادي كاظم

خبير الإحصاء والقياس الاقتصادي

2009

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى
دائرة المكتبة الوطنية
(2009/4/1207)

330

كاظم، أموري هادي

مقدمة في القياس الاقتصادي/ أموري هادي كاظم.- عمان: دار زهران، 2009.

( ) ص.

ر.أ : (2009/4/1407)

الواصفات: / الاقتصاد المالي//الاقتصاد/

- أعدت دائرة المكتبة الوطنية بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية
- يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعد هذا المصنف رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى.

المتخصصون في الكتاب الجامعي الأكاديمي العربي والأجنبي

دار زهران للنشر والتوزيع

تلفاكس : 5331289 – 6 – 962+، ص.ب 1170 عمان 11941 الأردن
E-mail : Zahran.publishers@gmail.com
www.darzahran.net

الإهداء

إلى أسرتي العزيزة

زوجتي وأبنائي.. حبا وحنانا



الموضوع		رقم الصفحة
المحتويات		**I**
مقدمة عامة		**IV**
الفصل الأول : النموذج الخطي البسيط (SLM)		1-46
1.1 تعريف القياس الاقتصادي		**1**
1.2 فروض المربعات الصغرى الاعتيادية		**2**
1.3 تقديرات المربعات الصغرى الاعتيادية		**7**
1.4 استدلال في تحليل الانحدار البسيط		**11**
1.5 تقدير معالم النموذج بطريقة دالة الامكان الاعظم		**17**
1.6 تحليل انحرافات المتغير المعتمد في النموذج الخطي البسيط		**25**
1.7 قياس فترات الثقة		**28**
1.8 تحليل دوال الطلب		**36**
تمارين		**46**
الفصل الثاني : النموذج الخطي العام (GLM)		49-121
2.1 التقدير حول نقطة الاصل		**49**
2.2 تقديرات (OLS) في حالة (GLM)		**51**
2.3 التقدير حول نقطة المتوسط		**56**
2.4 مقدرات الامكان الاعظم في حالة النموذج الخطي العام		**61**
2.5 تحليل الانحرافات في حالة النموذج الخطي المتعدد		**63**
2.6 استدلال في تحليل الانحدار العام		**77**
2.7 التنبؤات		**86**
2.8 تحليل دوال الانتاج		**110**
تمارين		**121**
الفصل الثالث: مشكلة عدم تجانس التباين		127-166
3.1 المقدمة		**127**
3.2 مشكلة عدم تجانس التباين		**128**
3.3 تقديرات المربعات الصغرى الموزونة		**134**
3.4 مقارنة بين طريقة (OLS) و (WLS) – كفاءة التقدير		**139**
3.5 اختبار عدم تجانس تباين الخطأ		**149**
3.6 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين		**155**
3.7 جدول تحليل التباين (ANOVA)		**164**
تمارين		**167**

الفصل الرابع : مشكلة الارتباط الذاتي		171-206
4.1 المقدمة		**171**
4.2 الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى		**171**
4.3 تقديرات المربعات الصغرى العامة		**176**
4.4 مقارنة بين طريقتي (OLS) و (GLS) كفاءة التقدير		**178**
4.5 طرق تقدير قيمة الارتباط الذاتي (ρ)		**191**
4.6 اختبار وجود الارتباط الذاتي		**194**
4.7 جدول تحليل التباين (ANOVA)		**205**
تمارين		**207**
الفصل الخامس : مشكلة التعدد الخطي		211-236
5.1 المقدمة		**211**
5.2 اثار مشكلة التعدد الخطي		**212**
5.3 اختبار وجود مشكلة التعدد الخطي		**214**
5.4 مقدرات انحدار الحرف		**220**
5.5 اختيار قيمة الثابت C		**226**
5.6 مقدرات المركبات الرئيسية		**229**
5.7 معايير تحديد عدد المركبات الرئيسية		**235**
تمارين		**237**
الفصل السادس : القيود المتطابقة		262-239
6.1 المقدمة		**239**
6.2 القيود المتطابقة واختزال المتغيرات		**239**
6.3 تقديرات المربعات الصغرى المقيدة (RLS)		**241**
6.4 مقارنة بين طريقة (RLS) و (OLS) – كفاءة التقدير		**245**
6.5 جدول تحليل التباين (ANOVA)		**246**
6.6 القيود المتطابقة والنماذج الخطية المجزأة		**253**
تمارين		**262**
الفصل السابع : منظومة المعادلات الآنية		265-314
7.1 المقدمة		**265**
7.2 فروض منظومة المعادلات الانية		**265**
7.3 التشخيص والاختزال		**269**
7.4 الشروط الاساسية للتشخيص		**274**
7.5 الصيغة العامة للتشخيص والاختزال		**281**
7.6 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS)		**293**
7.7 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (2SLS)		**302**
7.8 طريقة المتغيرات المساعدة (IV)		**304**
7.9 التنبؤ باستخدام منظومة المعادلات الآنية		**310**

تمارين		315
اسئلة عامة محلولة		319
الجداول الاحصائية		345
المصادر		355

بسم الـلـه الرحمن الرحيم

مقدمـــــة عامـــــة

General Introduction

لقد ظهر علم القياس الاقتصادي لأول مرة في عام **1930** م ، ويرجع بداية تدرسه إلى أوائل الخمسينات ، وهو أكثر حداثة في الوطن العربي ، إذ أدخل تدريسه في جامعات بعض الأقطار العربية منذ بضع سنوات ، وما زالت المكتبة العربية تفتقر إلى مثل هذا التخصص .

يُعد هذا الكتاب مدخلا اساسيا الى معالجة المشاكل التي تحيط بعلم بناء النماذج القياسية، لذا فقد عني الاهتمام باختيار وجود ومعالجة آثار مثل هذه المشاكل، اضافة الى التوصيف الرياضي للظاهرة وتشخيص المتغيرات وبالتالي تنقية البيانات الاحصائية.

ونظرا لوجود أنواع عديدة من النماذج التي يمكن أن تستخدم في التحليل والتنبؤ ، لذا فقد تم التركيز على النماذج المعتمدة على الدوال السلوكية والتي يمكن أن يعبر عنها في صيغة معادلة منفردة **(Single Equation Form)** لبيان الأثر المباشر للعلاقة بين المتغيرات، أما الأثر غير المباشر فإن قياسه أكثر صعوبة ، حيث يتطلب دراسة التداخل والتشابك بين العلاقات وبالتالي بناء نموذج متضمن عدة علاقات بهيئة منظومة معادلات آنية **(Simultaneous Equations System)** ، عليه فان الخطوة التالية بعد تشخيص نوع وطبيعة العلاقات التي تربط بين المتغيرات ، هي عملية تقدير معالم النماذج المفترضة واختبار مدى معنويتها بهدف الحصول على تنبؤات دقيقة يمكن توظيفها في الحياة العملية لرسم السياسات المختلفة.

لقد تضمن هذا الكتاب سبعة فصول ، الأول منها عام الهدف منه تعريف القارئ بعلم القياس الأقتصادي ومجالات تطبيقه ، حيث تضمن الفروض الأساسية اللازم توفرها عند تطبيق أساليب القياس الأقتصادي ، إضافة إلى مراجعة عامة لتحليل الانحدار وبالذات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية في تقدير واختبار معالم النموذج الخطي البسيط ، إضافة إلى اسلوب التقدير بطريقة الامكان الاعظم ، وأختتم هذا الفصل بتقدير وتحليل دوال الطلب.

في الفصل الثاني تم التطرق وبشكل مفصل إلى طرق تقدير معالم النموذج الخطي العام متناولين طريقة التقدير حول نقطة الأصل والتقدير حول نقطة المتوسط ، إضافة إلى التقدير بطريقة الإمكان الاعظم ، وبعد اجراء الاستدلال لمعالم النموذج الخطي العام تم التطرق الى التنبؤ باستخدام تحليل الانحدار واختتم الفصل بتقدير وتحليل دوال الانتاج.

لقد افرد كل من الفصل الثالث والرابع والخامس لدراسة ومعالجة مشاكل النموذج الخطي العام ، تناول الفصل الثالث دراسة طبيعة مشكلة عدم تجانس تبيان الخطأ ، الاختبار لوجودها ومعالجتها باستخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة ، في حين تناول الفصل الرابع مشكلة الارتباط الذاتي ، نوعيته وطرق تقديره ، عواقبه والاختبار لوجوده وسبل معالجته باستخدام المربعات الصغرى العامة ، أما مشكلة التعدد الخطي فقد تمت مناقشتها في الفصل الخامس حيث درست اثارها العامة في ظل كافة الفروض والاختبار لوجودها ومعالجتها باستخدام اسلوب انحدار الحرف والمركبات الرئيسية، في حين الفصل السادس تناول المربعات الصغرى المقيدة حيث تم توظيف القيود المتطابقة (البيانات العرضية) إلى جانب بيانات العينة في عملية التقدير ، وقد تضمنت الفصول الاربعة أعلاه مقارنة بين طريقة المربعات الصغرى الأعتيادية وطرق التقدير المطروحة لمعالجة وجود مثل هذه المشاكل ، بهدف قياس الكفاءة النسبية للمعالم المقدرة .

أما الفصل السابع فقد تناول منظومة المعادلات الآنية وبالذات الفروض العامة للمنظومة ومشكلة التشخيص والاختزال باعتبارها الخطوة الأساسية في بناء وتقدير معالم منظومة المعادلات الآنية، حيث تم التطرق إلى أسلوب المربعات الصغرى غير المباشرة وطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وأخيرا أسلوب المتغيرات المساعدة، اضافة الى التنبؤات الحاصل عليها باستخدام منظومة المعادلات الآنية، ومثل ما بدأنا هذا الكتاب بمقدمة عامة، انهيناه بتمارين عامة مع حلولها النموذجية.

وأخيرا وليس آخرا ، لابد من القول بأن هذا الكتاب ما هو إلا حصيلة لمجموعة محاضرات القيت على طلبة الصفوف المنتهية في قسم الاحصاء ، جامعة بغداد وجامعات القطر الجزائري وجامعة قاريونس في الجماهيرية الليبية إضافة إلى الخبرة العملية في مركز التنمية الصناعية التابع لجامعة الدول العربية في جمهورية مصر العربية .

وفي الختام يسعدني أن يكون هذا الكتاب مدخلا فعليا لكثير من قرآئه لغرض التعمق في أساليب القياس الاقتصادي وأن يكون في محتوياته وطريقة عرضه ما يثير في القارئ الرغبة في مواصلة دراسة هذا العلم ويحفزه للتعرف على تلك الأساليب التي لم يتسع هذا الكتاب الخوض في تفاصيلها.

وخير ما اختتم به كلامي بالآية الكريمة

" وقل اعملوا فسيرى اللـه عملكم ورسوله والمؤمنون"

صدق اللـه العظيم

أموري هادي كاظم

بغداد / العراق / 2005 م



النموذج الخطي البسيط (SLM)

The Simple Linear Model (SLM)

1.1 المقدمـــة

لقد تمخض نتيجة لتطور علم الاقتصاد ظهور نظريات عديـدة تحـاول تفسـير الظـواهر الاقتصـادية والتنبـؤ بـأثر التغير في بعض المتغيرات على بعضها الآخر ، ولكون هذه النظريات تتصف بطابع المعرفة النوعية (الوصـفية) **(qualitative)** وبالتالي يتعذر استخدامها في التنبؤ واتخاذ القرارت اضافة إلى أنها استنتاجات منطقية معينة غير معـروف مقـدما فـيما اذا كانت تنطبق او لا تنطبق على الواقع الذي تزعم النظرية تفسيره. هـذا مـن جهـة ومـن جهـة اخـرى ان الصـياغات التـي تقدمها النظرية الاقتصادية او الاقتصاد الرياضي صياغات مضبوطة لا يمكن قياسها مباشرة من واقـع البيانـات المتـوفرة، لـذا نشأت الحاجة إلى ادخال تعديلات معينة على هذه الصياغات لجعلها تأخذ طابعا احتمالياً قابلا للتقدير.

مما سبق يتضح بأنه يمكن النظر إلى البحث الاقتصادي التطبيقي على أنه بناء متكامـل يقـوم عـلى ركيـزتين هـما الاقتصاد الرياضي والاحصاء الرياضي ، وهذا بدوره يعني بأن هناك حاجة لنوع مـن البـاحثين الـذين يجمعـون بـين المعرفـة الاقتصادية في شكلها الرياضي (الاقتصاد الرياضي) من جهة والمعرفة الاحصائية وبالذات الاحصاء الرياضي مـن جهـة اخـرى ، وبمرور الزمن واتساع مجالات البحث الاقتصادي التطبيقي ، ازداد التـداخل بـين هـذين النـوعين مـن المعرفـة وتزايـد معـه الشعور بالحاجة إلى المزج والتكامل بينها في اطار موحد اخذ في التبلور شيئا فشيئا حتـى فـرض وجـوده المسـتقل في صـورة علم اجتماع جديد وهو ما يعرف اليوم بعلم القياس الاقتصادي [1] **(Econometrics)**.

---

[1] **تجدر الاشارة هنا إلى ان الترجمة العربية للمصطلح (Econometrics) الاقتصاد القياسي هو خطأ شائع ، وهذه الترجمة غير موفقـة ، عليه فأن الترجمة الصحيحة لهذا الموضوع هي القياس الاقتصادي.**

لقد عرف القياس الاقتصادي من قبل البحاثة البولوني أوسكار لانكه (**O. Lange**) كآلاتي:

"القياس الاقتصادي هو العلم الذي يستعين بالطرق الإحصائية لتحديد فعل القوانين الاقتصادية الموضوعية تحديدا كميا في الحياة الاقتصادية".

من هنا يمكن تعريف القياس الاقتصادي بأنه امتداد للنظرية الإحصائية بما يجعلها أكثر ملاءمة لأغراض البحث القياسي في الاقتصاد بهدف تشخيص العلاقات الاقتصادية واختبار مدى اتفاقها مع الواقع واستخدامها في التنبؤ بالظواهر الاقتصادية وبالتالي المساهمة في صياغة السياسات الاقتصادية بشكل سليم.

من التعريف أعلاه يتضح بأن دراسة هذا العلم تتطلب الماما بعلم الاقتصاد والرياضيات وعلم الاحصاء، الامر الذي دعا إلى تأخر ظهوره كعلم من جهة وإلى ضعف التخصص به في المراحل الجامعية الاولى من جهة اخرى حيث أنه لا يمكن الالمام به الماما كافيا إلا بعد الاحاطة بالعلوم الثلاثة الانفة الذكر وهو ما لا يتوفر في غالبية الدراسات الجامعية.

1.2 فروض المربعات الصغرى الاعتيادية

ان مشكلة توفيق خط مستقيم لمجموعة من المشاهدات تتوقف على طبيعة الانحرافات الملازمة للعلاقة الخطية المدروسة، بعبارة اخرى تتوقف على تحديد الخطأ العشوائي والذي يرمز له عادة بـ (U_i) كما في النموذج التالي:-

$$Y_i = \beta_O + \beta_1 X_i + U_i$$

ويسمى احيانا هذا الحد بالعنصر الاضطرابي (**Disturbances Terms**) ، وجاءت هذه التسمية نتيجة لكونه يؤدي إلى اضطراب العلاقة الخطية بين المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة، وعليه يمكن تقسيم العلاقة أعلاه إلى جزئين يتمثل الجزء الاول بالخط ($\bullet_O+\bullet_i X_i$) والتي تعرف بتغيرات المتغير التوضيحي (**Explained Variation**)، أما الجزء الثاني فيتمثل بالتأثير العشوائي (U_i) (**Disturbance Term**) وتعرف بالتغيرات غير الموضحة (**Unexplained Variation**)، وهي في الواقع عبارة عن انحراف القيمة التقديرية عن القيمة الحقيقة (المشاهدة) للمتغير المعتمد، ويمكن توضيح ذلك بيانيا كما في الشكل (**1**).

ويمكن ارجاع الانحراف بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية إلى عدة عوامل منها:-

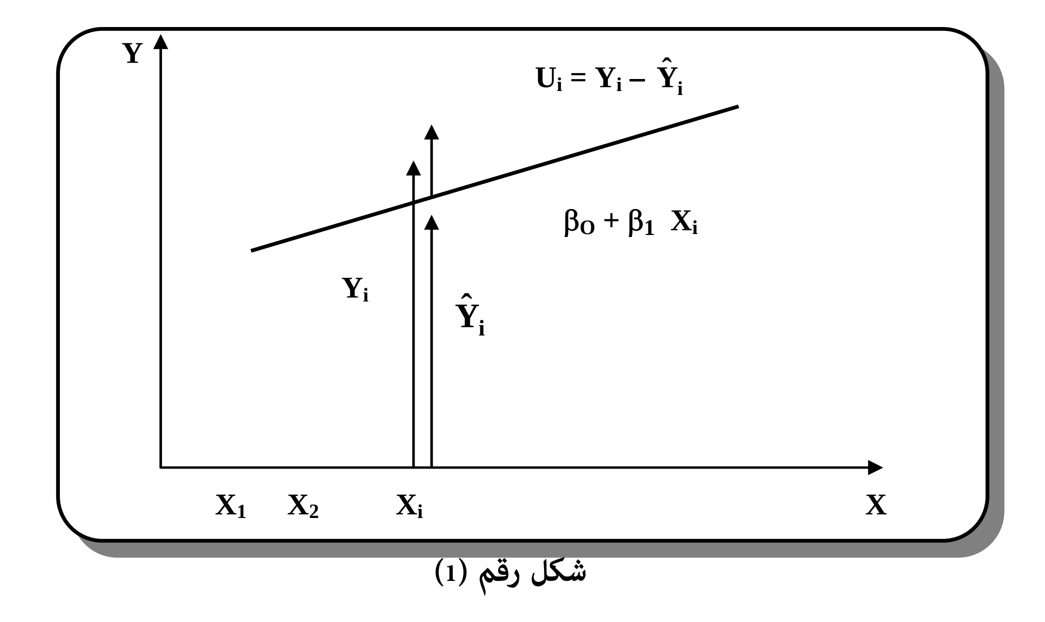
1-حذف بعض المتغيرات من الدالة المدروسة وتعرف بـ **(Left out Variables)**.

2-السلوك العشوائي للجنس البشري ويعرف بـ **(Randomness of Human Behaviours)**.

3-الصياغة الناقصة للنموذج الرياضي **(Uncomplete Model)**.

4- أخطاء التجميع **(Aggregation Error)**.

5- أخطاء القياس **(Measurement Error)**.



شكل رقم (1)

ومن الجدير بالذكر أن مصادر الأخطاء الأربعة الأولى تؤدي إلى إعطاء شكل خاطئ للمعادلة، وتعرف عادة بالاخطاء في المعادلات (**Errors in Equations**) ، أما المصدر الخامس للخطأ فيسمى بخطأ القياس للمشاهدة ذاتها، ولأخذ مثل هذه الأخطاء في الاعتبار يستوجب الالمام بخواص الخطأ العشوائي (U_i) في العلاقة الخطية المدروسة.

الفرض الاول

(U_i) متغير عشوائي حقيقي.

أي ان كل قيمة من قيم (U_i) وفي أي فترة زمنية تعتمد على الصدفة وقد تكون هذه القيم سالبة أو موجبة أو مساوية إلى الصفر.

الفرض الثاني

$E(U_i) = 0$

وهذا يعني أن كل قيمة من قيم المتغير المستقل سوف تأخذ قيما مقابلة لـ (U_i) والأخيرة هذه قد تكون أكبر أو أصغر أو مساوية إلى الصفر ، وحاصل جمع هذه القيم يكون مساويا للصفر واستنادا إلى هذا الفرض يمكن القول:

$$E(Y_i) = \beta_O + \beta_1 X_i$$

الفرض الثالث

$$Var(U_i) = E[U_i - E(U_i)]^2 = \sigma_u^2$$

وهذا يعني بأن تباين قيم (U_i) حول متوسطها يكون ثابتا في كل فترة زمنية بالنسبة لجميع قيم المتغير المستقل (X_i).

الفرض الرابع

(U_i) يتوزع توزيعا طبيعيا.

أي أن توزيع (U_i) حول متوسطها المساوي للصفر يكون متماثلا وذلك عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل (X_i).

ويمكن وضع الفروض الاربعة السابقة بشكل مختصر في أدناه وتمثيلها بيانيا كما في الشكل رقم (2).

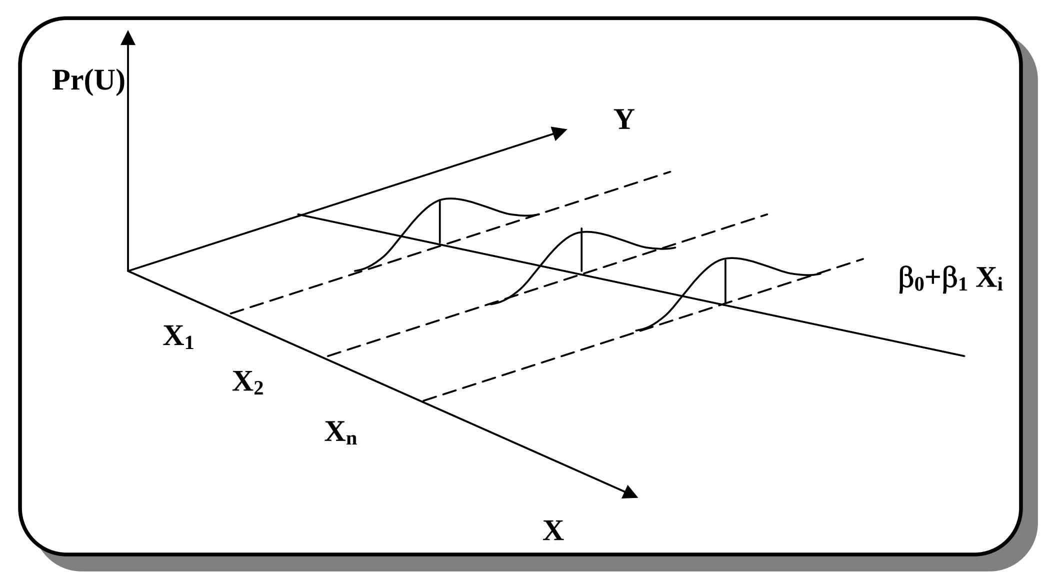
$$U_i \sim N\left(0, \sigma_u^2\right)$$

الفرض الخامس

$$Cov.\left(U_i\ U_j\right) = E\left(U_i\ U_j\right) = 0 \qquad \forall \quad i \neq j$$

$$i, j = 1, 2, ..., n$$

أي أن القيم المختلفة للمتغير العشوائي (U_i) تكون مستقلة عن بعضها البعض ، بعبارة أخرى التباين المشترك لأي (U_i) مع أي (U_j) مساوي للصفر، بعبارة اخرى قيمة العنصر العشوائي في أي فترة لا تعتمد على قيمته في فترة اخرى.



شكل رقم (2)

الفرض السادس

$E(U_i X_i) = 0$

أي ان قيم (U_i) غير مرتبطة **(Not Correlated)** بأي من المتغيرات المستقلة، وفي المجال التطبيقي يتحقق هذا الفرض بثبوت قيم المتغير المستقل (X_i) من عينة لاخرى.

وكمثال على ذلك دراسة دالة الطلب للمستهلك حيث يكون المتغير المعتمد متمثلا بالمجاميع السلعية المختلفة التي ينفق عليها المستهلك بينما المتغير المستقل يكون ثابت لكل مجموعة سلعية مدروسة ويتمثل بالدخل.

الفرض السابع

ان تكون المتغيرات المستقلة غير مرتبطة (متلازمة) ببعضها البعض **(No Malticollinearity)** ، وفي الواقع يواجه الباحث هذا الفرض عندما يكون النموذج المدروس متضمنا أكثر من متغير مستقل واحد، حيث يجب ان لا يكون بينهما أي تعدد خطي، وبالتالي يمكن التعرف على أثر كل منها على المتغير العشوائي المعتمد بشكل منفصل.

الفرض الثامن

ان تكون العلاقة المراد تقدير معالمها قد تم تشخيصها **(Identification Problem)** أي أن يكون النموذج المدروس ذات شكل رياضي مميز ولا يحتوي على نفس المتغيرات التي تتضمنها علاقة اخرى في نفس مجال البحث وبالتالي يكون الباحث على ثقة تامة من ان المعالم التي يحصل عليها ممثله فعلا للظاهرة موضع البحث.

أما فيما يتعلق بخواص المتغير المعتمد فأولها هذه هو ان يكون توزيع هذا المتغير توزيعا طبيعيا وتوقعه أو متوسطه يعطي كالاتي:-

$$\overline{Y} = E(Y_i) = \beta_O + \beta_1 X_i$$

أما تباين هذا المتغير فيعطى بالشكل التالي:

$$Var(Y_i) = E[(Y_i) - E(Y_i)]^2 = \sigma_u^2$$

ويمكن وضع الخواص أعلاه بشكل مختصر كالاتي:

$$Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma_u^2)$$

1.3 تقديرات المربعات الصغرى الاعتيادية

يتضح من مراجعة فروض المربعات الصغرى الاعتيادية أعلاه، أنه يمكن كتابة الصيغة بشكلها النظري والتي تمثل العلاقة بين متغير معتمد (Y_i) ومتغير مستقل (X_i) كالاتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

حيث أن :

$\bullet_0$: يمثل الحد الثابت للنموذج.

$\bullet_1$: يمثل الميل الحدي للنموذج.

U_i : يمثل الخطأ العشوائي والتي يفترض فيه تحقيق كافة الشروط المارة الذكر.

والصيغة التقديرية للنموذج النظري أعلاه توضع بالشكل التالي:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i$$

أو

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

عليه فإن أفضل طريقة للحصول على اصغر قيمة ممكنة للأخطاء ، يتم بواسطة تربيع الانحرافات ومن ثم محاولة جعل مجموع مربعات هذه الانحرافات أصغر ما يمكن، أي:

$$\sum U_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - E(Y_i) \right]^2 \rightarrow \text{Min}$$

أو

$$\sum U_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i \right]^2$$

اذن ايجاد النهاية الصغرى لـ $\left(\sum_{i=1}^{n} U_i^2 \right)$ يستوجب مساواة مشتقتها الجزئية الاولى لكل من ($\bullet_0$) و ($\bullet_1$) للصفر أي

$$\frac{\partial \sum U_i^2}{\partial \beta_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sum U_i^2}{\partial \beta_1} = 0$$

بعبارة اخرى

$$\frac{\partial \sum U_i^2}{\partial \beta_0} = -2 \sum \left(Y_i - b_0 - b_1 X_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial \sum U_i^2}{\partial \beta_1} = -2\sum X_i \left(Y_i - b_0 - b_1 X_i\right) = 0$$

وباعادة ترتيب المعادلتين أعلاه نحصل على:-

$$\sum Y_i = n\,b_0 + b_1 \sum X_i$$

$$\sum X_i\, Y_i = b_0 \sum X_i + b_1 \sum X_i^2$$

وبحل هذين المعادلتين الطبيعيتين حلا آنيا لكل من الحد الثابت (b_0) والميل الحدي (b_1) نحصل على:

$$b_1 = \frac{n\sum X_i\, Y_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \quad \text{.......... (1)}$$

$$b_0 = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum X_i\, Y_i\right)}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} = \overline{Y} - b_1\, \overline{X} \quad \text{.......... (2)}$$

اسلوب التقدير أعلاه يعرف بالتقدير حول نقطة الاصل **(Estimation round the original point)**، أما التقدير حول نقطة المتوسط **(Estimation round the mean point)** فيمكن الوصول إليه بالشكل التالي:

$$x_i = X_i - \overline{X}$$
$$y_i = Y_i - \overline{Y}$$

وبما ان

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\, \overline{X}$$

بطرح الوسط الحسابي للمتغير المعتمد من طرفي الصيغة التقديرية للنموذج الخطي البسيط نحصل على:

$$\hat{Y}_i - \overline{Y} = b_0 + b_1\, X_i - \overline{Y}$$

$$\therefore \hat{Y}_i - \overline{Y} = \overline{Y} - b_1\, \overline{X} + b_1\, X_i - \overline{Y}$$

$$\therefore \hat{y}_i = b_1 \left(X_i - \overline{X}\right)$$

$$\hat{y}_i = b_1\, x_i$$

بعبارة اخرى

$$E\left(y_i\right) = \beta_1\, x_i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} U_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - E(y_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_1 x_i]^2$$

$$\therefore \frac{\partial \sum U_i^2}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - b_1 x_i) = 0$$

$$\therefore b_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad \text{.......... (3)}$$

حيث ان كل من المتغير المعتمد (Y_i) والمتغير المستقل (X_i) مقاسا بالانحرافات ، أما الحد الثابت (b_0) فيقدر بنفس الصيغة الانفة الذكر.

إضافة إلى الاسلوبين أعلاه، هنالك أسلوب ثالث يجمع بين الاثنين معا، أي استخدام انحرافات مشاهدات المتغير المستقل والقيم الاصلية للمتغير المعتمد، مثل هذا الاسلوب يمكن الوصول اليه مباشرة من الصيغة رقم (3) أعلاه حيث يمكن أعادة كتابتها بالشكل التالي:

$$b_1 = \frac{\sum x_i (Y_i - \overline{Y})}{\sum x_i^2}$$

$$= \frac{\sum x_i Y_i - \overline{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2}$$

وبما ان $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$$\therefore b_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum y_i X_i}{\sum x_i^2} \quad \text{.......... (4)}$$

ويمكن اعادة كتابة الصيغة أعلاه بالشكل التالي:

$$b_1 = \sum W_i Y_i$$

حيث ان

$$W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

يتضح من المعادلة أعلاه بأن الميل الحدي (b_1) المقدر ما هو إلا عبارة عن دالة خطية في المتغير العشوائي (Y_i).

وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$b_1 = \sum W_i (\beta_0 + \beta_1 X_i + U_i) = \beta_0 \sum W_i + \beta_1 \sum W_i X_i + \sum W_i U_i \quad \text{.......... (5)}$$

وبما ان $\sum W_i = 0$ وذلك لأن:

$$\sum W_i = \sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} = \frac{1}{\sum x_i^2} \sum x_i = 0$$

وان $\sum W_i \; X_i = 1$ وذلك لأن

$$\sum W_i X_i = \frac{1}{\sum x_i^2} \sum x_i X_i = \frac{1}{\sum x_i^2} \sum \left(X_i - \overline{X}\right) X_i$$

$$\sum W_i X_i = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right) X_i}{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2} = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2} = 1$$

وبالتعويض في العلاقة رقم (5) نحصل على :

$$b_1 = \beta_1 + \sum W_i \; U_i \quad \text{.......... (6)}$$

$$\therefore E\left(b_1\right) = \beta_1 + \sum W_i \; E\left(U_i\right)$$

$$\therefore E\left(b_1\right) = \beta_i$$

أما تباين الميل الحدي (b_1) فيمكن الحصول عليه مباشرة من العلاقة رقم (6) أعلاه كالاتي:

$$b_1 - \beta_1 = \sum W_i U_i$$

$$\left(b_1 - \beta_1\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} W_i^2 U_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} W_i \; W_j \; U_i \; U_j$$

$$\therefore E\left(b_1 - \beta_1\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} W_i^2 \; E\left(U_i^2\right) + 2\sum_{i<j}^{n} W_i \; W_j \; E\left(U_i \; U_j\right)$$

$$\therefore Var\left(b_1\right) = \sigma_u^2 \sum W_i^2 = \sigma_u^2 \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right)^2$$

$$\therefore Var\left(b_1\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} \quad \text{.......... (7)}$$

أما فيما يتعلق بالحد الثابت (b_0)

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}$$

$$= \overline{Y} - \left(\sum W_i \; Y_i\right) \overline{X}$$

$$= \frac{\sum Y_i}{n} - \overline{X} \sum W_i \; Y_i$$

$$\therefore b_0 = \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) Y_i$$

$$= \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) (\beta_0 + \beta_1 X_i + U_i)$$

$$b_0 = \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) \beta_0 + \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) \beta_i X_i + \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) U_i$$

$$b_0 = \frac{n\beta_0}{n} - \beta_0 \overline{X} \sum W_i + \frac{\beta_1 \sum X_i}{n} - \overline{X} \beta_1 \sum W_i X_i + \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) U_i$$

$$b_0 = \beta_0 + \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) (U_i) \quad \text{.......} \quad (8)$$

$$\therefore E(b_0) = \beta_0$$

أما تباين الحد الثابت فيحسب كالاتي ، لدينا من العلاقة رقم (8) أعلاه

$$b_0 - \beta_0 = \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) U_i$$

$$\therefore (b_0 - \beta_0)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right)^2 U_i^2 + 2 \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_j \right) U_i U_j$$

$$\therefore E(b_0 - \beta_0)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right)^2 E(U_i^2) + 2 \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right) \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_j \right) E(U_i U_j)$$

$$= \sigma_u^2 \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{n} - \overline{X} W_i \right)^2$$

$$\therefore Var(b_0) = \sigma_u^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2 \overline{X} W_i}{n} + \overline{X}^2 W_i^2 \right) = \frac{\sigma_u^2}{n} + \frac{\sigma_u^2 \overline{X}^2}{\Sigma x_i^2}$$

$$\therefore Var(b_0) = \sigma_u^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\Sigma x_i^2} \right) \quad \text{.......} \quad (9)$$

1.4 استدلال في تحليل الانحدار البسيط

لإثبات أن (b_o) و(b_1) أفضل تقدير خطي غير متحيز(لكل من ($\bullet_0$) و ($\bullet_1$) **Best Linear Unbiased Estimate**

(BLUE) يجب تحقق الشروط الثلاثة التالية:

1- أن يكون المقدر دالة خطية لبيانات العينية (Linear function of the sample observation).

2- أن يكون المقدر غير متحيز (Unbiased)

3- أن يكون تباين المقدر أصغر من تباين أي مقدر خطي غير متحيز أخر (Minimum Variance).

في حالة النموذج الخطي البسيط ، وكما رأينا سابقا يقدر الميل الحدي بطريقة (OLS) وفق الصيغة التقديرية التالية:

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} W_i \; Y_i \quad \text{.......... (10)}$$

حيث أن $W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$, $i = 1,2,...,n,$

وبما أن (W_i) ما هو إلا عبارة عن مقدار ثابت

$$b_1 = W_1 Y_1 + W_2 \; Y_2 + ... + W_n \; Y_n \quad \text{.......... (11)}$$

من الصيغة رقم (11) يتضح بأن المقدر (b_1) ما هو إلا عبارة عن دالة خطية في مشاهدات العينة (Y_i)، أي أن

$$b_1 = f\left(Y_i\right)$$

وكذلك بينا بأن المقدر غير متحيز، أي أن:

$$E(b_1) = \beta_1$$

ويمتلك تباين يعطى وفق الصيغة التالية:

$$Var\left(b_1\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} = \frac{\sigma_u^2}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}$$

في حين الصيغة التقديرية للحد الثابت (b_0)، تعطى كالتالي:

$$\begin{aligned} b_o &= \overline{Y} - b_1 \; \overline{X} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{X} \, W_i \right) Y_i \end{aligned}$$

وبما ان المقدار داخل القوس ثابت ولنفرض مساويا إلى (C_i)

$$\therefore b_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i \; Y_i$$

بعبارة أخرى

$$b_0 = C_1 \; Y_1 + C_2 \; Y_2 + ... + C_n \; Y_n \quad \text{.......... (12)}$$

ومن الصيغة رقم (12) أعلاه يتضح أن الحد الثابت ما هو إلا عبارة عن دالة خطية في مشاهدات العينة (Y_i)، أي أن

$$b_0 = f(Y_i)$$

علما بأن هذا المقدر غير متحيز ، أي أن

$$E(b_0) = \beta_0$$

وتباينه يعطى وفق الصيغة التقديرية التالية:

$$Var(b_0) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2}\right) = \frac{\sigma_u^2 \sum X_i^2}{n\sum x_i^2}$$

وبما أن الشروط الثلاثة أعلاه متحققة في كل من الميل الحدي (b_1) والحد الثابت (b_0) للنموذج الخطي البسيط ، عليه يمكن ومن خلال تطبيق نظرية كرامير –راو (Cramer-Rao Lower Bound Theorem)، حيث تنص هذه النظرية على أن تباين المقدر غير المتحيز (b_j) لـ ($\bullet_j$) حيث أن $j = 0, 1, 2, \ldots, K$ ، يجب ان يحقق التالي:

$$Var(b_j) \geq \frac{1}{E\left[\frac{\partial \ln L(\beta_j)}{\partial \beta_j}\right]^2} \quad \text{.......... (13)}$$

أو

$$Var(b_j) = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\beta_j)}{\partial \beta_j^2}\right]} \quad \text{.......... (14)}$$

بشكل تفصيلي ولنموذج خطي بسيط ، يمكن أعادة كتابة الصيغة رقم (14) كالتالي:

$$C.R.L.b. = \frac{1}{\begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1 \partial \beta_0}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1^2}\right) \end{bmatrix}} \quad \text{.......... (15)}$$

حيث أن (ln L) تمثل اللوغارتيم الطبيعي لدالة الامكان الاعظم.

ولغرض تطبيق الصيغة أعلاه ، لمعرفة فيما اذا كانت المعالم المقدرة للنموذج الخطي البسيط باستخدام (OLS) تمتلك خاصية أقل تباين ممكن ، فإن دالة الكثافة لكل مشاهدة من مشاهدات العينة ، يمكن أن توضع بالشكل التالي:

$$f\left(Y_i\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}\, e^{\frac{-\left[Y_i-E\left(Y_i\right)\right]^2}{2\sigma_u^2}}$$

ومنه دالة الامكان الاعظم، يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$L\left(\beta_0,\beta_1,Y_1,Y_2,\ldots,Y_n\right)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma_u^2\right)^{n/2}}\,.\,e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum\left(Y_i-\beta_0-\beta_1 X_i\right)^2}$$

وبأخذ اللوغارتيم للطرفين

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\right)-\frac{n}{2}\ln\sigma_u^2-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum\left(Y_i-\beta_o-\beta_1 X_i\right)^2$$

وبأجراء التفاضل الجزئي الاول والثاني نسبة إلى المعالم $\bullet_0$ و $\bullet_1$ نحصل على ما يلي:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\beta_0}=\frac{1}{\sigma_u^2}\sum\left(Y_i-\beta_0-\beta_1 X_i\right) \quad \ldots\ldots (16)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_0^2}=-\frac{n}{\sigma_u^2}$$

ومن الصيغة رقم (16) نحصل على

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_0\,\partial\beta_1}=-\frac{\sum X_i}{\sigma_u^2}$$

وكذلك الحال فما يتعلق بالميل الحدي ($\bullet_1$).

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\beta_1}=\frac{1}{\sigma_u^2}\sum\left(Y_i-\beta_0-\beta_1 X_i\right) X_i \quad \ldots\ldots (17)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_1^2}=-\frac{\sum X_i^2}{\sigma_u^2}$$

ومن الصيغة رقم(17) أعلاه نحصل على

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_1\,\partial\beta_0}=-\frac{\sum X_i}{\sigma_u^2}$$

وبالتعويض في الصيغة رقم (15) ، نحصل على

$$C.R.L.b.=\frac{1}{\begin{bmatrix}\frac{n}{\sigma_u^2} & \frac{\sum X_i}{\sigma_u^2}\\ \frac{\sum X_i}{\sigma_u^2} & \frac{\sum X_i^2}{\sigma_u^2}\end{bmatrix}}$$

وبإعادة ترتيب الصيغة أعلاه نحصل على

$$C.R.L.b. = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

المصفوفة أعلاه تعرف بمصفوفة المعلومات أو مصفوفة فيشر (**fisher matrix**)، وبإعادة كتابتها يمكن الحصول على التباين والتباين المشترك للمعالم المطلوب تقديرها.

$$C.R.L.b. = \frac{\sigma_u^2}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{bmatrix} = \frac{\sigma_u^2}{n\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{bmatrix}$$

$$C.R.L.b = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_u^2 \sum X_i^2}{n\sum x_i^2} & -\dfrac{\sigma_u^2 \sum X_i}{n\sum x_i^2} \\ -\dfrac{\sigma_u^2 \sum X_i}{n\sum x_i^2} & \dfrac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} \end{bmatrix} \quad \text{.............} \quad (18)$$

قطر المصفوفة أعلاه تمثل تباين الحد الثابت والميل الحدي للنموذج الخطي البسيط على التوالي، في حين العناصر خارج نطاق القطر تمثل التباين المشترك بين b_1, b_0 أي $Cov(b_0, b_1)$ ، ومنها يستنتج ما يلي:

$$Var\left(b_0\right)_{C.R.L.b} = \frac{\sigma_u^2 \sum X_i^2}{n\sum x_i^2} = Var\left(b_0\right)_{OLS}$$

وكذلك

$$Var\left(b_1\right)_{C.R.L.b} = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} = Var\left(b_1\right)_{OLS}$$

يتضح من أعلاه، وحسب نظرية كرامير-راو ، أن كل من المقدرين $(b_1), (b_0)$ هما أفضل تقدير خطي غير متحيز (**BLUE**).

أما خاصية الاتساق (**Consistency**) لمقدرات (**OLS**) في حالة النموذج الخطي البسيط التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

$$U_i \sim N\left(0, \sigma_u^2\right), \quad E\left(U_i\, U_j\right) = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

المقدرات $(b_1), (b_0)$ في النموذج أعلاه، تكون متسقة لـ β_0 و β_1 في حالة تحقق الشرطين التاليين:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\lim\limits_{n\to\infty} E\left(b_j\right)=\beta_j \\ 2-\lim\limits_{n\to\infty} Var\left(b_j\right)=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

حيث ان:

$j = 0, 1$

كما بينا سابقا، أن الحد الثابت (b_0) في النموذج الخطي البسيط غير متحيز، أي أن

$$E\left(b_0\right)=\beta_0$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(b_0\right)=\beta_0$$

عليه فإن

$$Var\left(b_0\right)=\frac{\sigma_u^2\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} Var\left(b_0\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_u^2\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sigma_u^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} Var\left(b_0\right)=\lim_{n\to\infty}\sigma_u^2.zero=zero$$

وبتحقق الشرطين أعلاه ، يمكن القول بأن (b_0) تقدير متسق لـ ($\bullet_0$).وبنفس الاسلوب يمكن الاثبات بأن الميل الحدي (b_1) تقدير متسق لـ (β_1) اي ان

$$\lim_{n\to\infty} E(b_1)=\beta_1 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} Var(b_1)=0$$

إضافة إلى خاصية أفضل تقدير خطي غير متحيز وخاصية الاتساق، يمكن البرهنة بأن كل من الحد الثابت والميل الحدي للنموذج الخطي البسيط، مقدرات كفوءة (Efficient estimator) لـ $\bullet_0$ و $\bullet_1$ ، وذلك من خلال تحقق شرط الكفاءة التالي:

$$eff\left(b_j\right)=\frac{Var\left(b_j\right)\ \text{in C.R.L.B}}{Var\left(b_j\right)\ \text{in OLS}}\le 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

حيث أن

$j=0, 1$

عليه فأن المقدر (b_j) يكون كفوء لـ $\bullet_j$ في الحالة التالية: $eff\left(b_j\right)\le 1$

بالرجوع إلى مصفوفة التباين والتباين المشترك المرقمة (18) والخاصة بمعالم النموذج الخطي البسيط ، ومقارنة ذلك بتباين نفس المعالم المقدرة بأسلوب (OLS) ، نحصل بالنسبة للميل الحدي (b_1).

$$eff(b_1) = \frac{\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}}{\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}} = 1$$

وكذلك الحال بالنسبة للحد الثابت (b_0):

$$eff(b_0) = \frac{\sigma_u^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \bigg/ \frac{\sigma_u^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2} = 1$$

أي أن كل من الحد الثابت (b_0) والميل الحدي (b_1) مقدرات كفوءة إلى •$_0$ و •$_1$ على التوالي.

1.5 تقدير معالم النموذج بطريقة دالة الامكان الاعظم

ان احتمال انتماء العينة إلى المجتمع الذي سحبت منه يكون أكبر من احتمال انتماء هـذه العينـة إلى أي مجتمـع آخر وبما ان تقدير معالم المجتمع يتم عن طريق قيم مشاهدات العينة وذلك باحتساب احـتمال انتسـاب العينـة إلى تلـك المجتمعات المختلفة، لذا يستوجب تشخيص المجتمع الذي تنتمي إليه تلك العينة في ضوء اكبر احتمال متحقق بين مختلف هذه الاحتمالات ، وبشكل عام يقصد بأحتمال تحقق المشاهدة بدالة الكثافـة الاحتماليـة (**Probability Density Function**) لكل مشاهدة من مشاهدات المتغير المعتمد (Y_i) واستنادا إلى الفروض السالفة الذكر واللازمة لتقدير معالم نموذج الانحـدار بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (**OLS**) والقائلة بأن الأخطاء الناتجة من الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية يتوزع توزيعا طبيعيا، ومنه يمكن القول بأن كل مشاهدة من مشاهدات المتغير المعتمد كذلك تتوزع توزيعا طبيعيا بتوقع قدره:

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

وتباين

$$Var(Y_i) = \sigma_u^2$$

بشكل عام ولعينة عشوائية حجم (**n**) يأخذ المتغير المعتمد المشاهدات التالية $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ، دالة الكثافة لكل مشاهدة من مشاهدات هذه العينة يمكن ان توضع بدلالة المعالم المقدرة من العينة (•$_0$, •$_1$, •$_u^2$) بالشكل التالي:-

$$P_r(Y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \cdot e^{\frac{-[Y_1 - (\beta_0 + \beta_1 X_1)]^2}{2\sigma_u^2}}$$

$$P_r(Y_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}.e^{\frac{-[Y_2-(\beta_0+\beta_1X_2)]^2}{2\sigma_u^2}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$P_r(Y_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}.e^{\frac{-[Y_n-(\beta_0+\beta_1X_n)]^2}{2\sigma_u^2}}$$

وبما ان قيم المتغير المعتمد مستقلة الواحدة عن الاخرى، كما ورد في الفروض السابقة، لذا فإن دالة الكثافة المشتركة (Joint Probability Density Function) لكافة مشاهدات المتغير المعتمد تكون مساوية إلى حاصل ضرب الاحتمالات المنفردة.

$$P_r(Y_1,Y_2,...,Y_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}.e^{\frac{-[Y_1-(\beta_0+\beta_1X_1)]^2}{2\sigma_u^2}}\right).$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}.e^{\frac{-[Y_2-(\beta_0+\beta_1X_2)]^2}{2\sigma_u^2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}.e^{\frac{-[Y_n-(\beta_0+\beta_1X_n)]^2}{2\sigma_u^2}}\right)$$

$$\therefore P_r(Y_1,Y_2,...,Y_n)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}.e^{\frac{-[Y_i-(\beta_0+\beta_1X_i)]^2}{2\sigma_u^2}}\right)$$

$$=\left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{n}{2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i)^2}$$

من العلاقة اعلاه يتضح بأن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة ما هي إلا عبارة عن دالة لمعالم المجتمع المطلوب تقديرها $(\beta_0,\beta_1,\sigma_u^2)$ أي ان:

$$MLE(\beta_0,\beta_1,\sigma_u^2)=\left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{n}{2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i)^2}$$

ولغرض تقدير معالم العلاقة أعلاه يستوجب تحويلها إلى الشكل الخطي، ويتم ذلك بأخذ اللوغارتيم لطرفيها.

$$\ln(MLE)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma_u^2)-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i)^2$$

لجعل دالة أعظم الامكان بأكبر احتمال ممكن يستوجب أخذ مشتقاتها الجزئية الاولى لكافة المعالم المطلوب تقدريها ، بعبارة أخرى:

$$\frac{\partial \ln(MLE)}{\partial \beta_0} = 0, \quad \frac{\partial \ln(MLE)}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial \ln(MLE)}{\partial \sigma_u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln(MLE)}{\partial \beta_0} = \frac{2}{2\sigma_u^{*2}} \sum \left(Y_i - \beta_0^* - \beta_1^* X_i\right) = 0 \quad \text{.......... (21)}$$

$$\frac{\partial \ln(MLE)}{\partial \beta_1} = \frac{2}{2\sigma_u^{*2}} \sum \left(Y_i - \beta_0^* - \beta_1^* X_i\right) X_i = 0 \quad \text{.......... (22)}$$

$$\frac{\partial \ln(MLE)}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{n}{2\sigma_u^{*2}} + \frac{1}{2\sigma_u^{*4}} \sum \left(Y_i - \beta_0^* - \beta_1^* X_i\right)^2 = 0 \quad \text{.......... (23)}$$

ومن المعادلتين (21) و(22) والتي هما عبارة عن المعادلتين الانيتين يمكننا الحصول على تقدير لكل من الحد الثابت (β_0^*) والميل الحدي (β_1^*) بالشكل التالي :

$$\sum Y_i = n\beta_0^* + \beta_1^* \sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = \beta_0^* \sum X_i + \beta_1^* \sum X_i^2$$

وبحلها بطريقة المصفوفات مثلا:

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix}$$

نحصل على

$$\beta_0^* = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{n \sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

$$\beta_1^* = \frac{n \sum X_i Y_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{n \sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

من الصيغة التقديرية للحد الثابت والميل الحدي اعلاه ، يتضح أن تقديرات (OLS) مطابقة تماما لتقديرات (ML)، أي أن

$$\beta_1^* = b_1$$

$$\beta_0^* = b_0$$

أما تباين العينة $\left(S_e^{*2}\right)$ فيمكن الحصول عليه من العلاقة (23) بالشكل التالي:

$$-n\sigma_u^{*2} + \sum\left(Y_i - \beta_0^* - \beta_1^* X_i\right)^2 = 0$$

$$\sigma_u^{*2} = \frac{\sum\left(Y_i - \beta_0^* - \beta_1^* X_i\right)^2}{n}$$

$$\sigma_u^{*2} = \frac{\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{n}$$

$$\sigma_u^{*2} = \frac{\sum e_i^2}{n} = E\left(S_e^{*2}\right)$$

ومنه يتضح بأن طريقة دالة أعظم الامكان تعطي تباين متحيز، ولغرض تصحيح تحيز تباين العينة المقدر بطريقة دالة أعظم الامكان، دعنا نتناول تحليل الانحرافات وكالاتي:

$$e_i = y_i - b_1 x_i$$

حيث ان (x_i,y_i) تمثل انحرافات كل من المتغير المعتمد والمتغير المستقل عن وسطهما الحسابي وبنفس الوقت يمكن كتابة النموذج النظري التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

ومتوسطه

$$\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \overline{U}$$

وبالطرح نحصل على

$$Y_i - \overline{Y} = \beta_0 - \beta_0 + \beta_1 X_i - \beta_1 \overline{X} + U_i - \overline{U}$$

$$\therefore y_i = \beta_1 x_i + \left(U_i - \overline{U}\right)$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على

$$e_i = \beta_1 x_i + \left(U_i - \overline{U}\right) - b_1 x_i$$

$$e_i = -\left(b_1 - \beta_1\right) x_i + \left(U_i - \overline{U}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(b_1 - \beta_1\right) x_i + \left(U_i - \overline{U}\right)\right]^2$$

$$= \left(b_1 - \beta_1\right)^2 \sum x_i^2 - 2\left(b_1 - \beta_1\right) \sum x_i \left(U_i - \overline{U}\right) + \sum \left(U_i - \overline{U}\right)^2$$

وبالتقسيم على حجم العينة

$$\frac{\sum e_i^2}{n} = \frac{1}{n}\left(b_1 - \beta_1\right)^2 \sum x_i^2 - \frac{2}{n}\left(b_1 - \beta_1\right) \sum x_i \left(U_i - \overline{U}\right) + \frac{1}{n} \sum \left(U_i - \overline{U}\right)^2$$

$$\therefore S_e^{*2} = \frac{1}{n}\left(b_1 - \beta_1\right)^2 \sum x_i^2 - \frac{2}{n}\left(b_1 - \beta_1\right) \sum x_i \left(U_i - \overline{U}\right) + \frac{1}{n} \sum \left(U_i - \overline{U}\right)^2$$

وبأخذ التوقع

$$E\left(S_e^{*2}\right) = \frac{1}{n} \sum x_i^2 \, E\left(b_1 - \beta_1\right)^2 - \frac{2}{n} E\left(b_1 - \beta_1\right) \sum x_i \left(U_i - \overline{U}\right) + \frac{1}{n} E\left[\sum \left(U_i - \overline{U}\right)^2\right]$$

......................(24)

الحد الاول من العلاقة (24) أعلاه

$$\frac{1}{n} \sum x_i^2 E\left(b_1 - \beta_1\right)^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} \operatorname{var}\left(b_1\right) = \frac{\sum x_i^2}{n} \cdot \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} = \frac{\sigma_u^2}{n}$$

في حين الحد الثاني من العلاقة (24)

$$-\frac{2}{n} E\left[\left(b_1 - \beta_1\right) \sum x_i \left(U_i - \overline{U}\right)\right] = -\frac{2}{n} E\left[\left(b_1 - \beta_1\right) \sum x_i U_i - \overline{U}\left(b_1 - \beta_1\right) \sum x_i\right]$$

$$= -\frac{2}{n} E\left[\left(b_1 - \beta_1\right) \sum x_i U_i\right] \quad \text{...(25)}$$

وبما ان

$$b_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (\beta_0 + \beta_1 X_i + U_i)}{\sum x_i^2}$$

ومنه

$$b_1 \sum x_i^2 = \beta_0 \sum x_i + \beta_1 \sum x_i X_i + \sum x_i U_i$$

$$= \beta_1 \sum (X_i - \overline{X}) X_i + \sum x_i U_i$$

$$= \beta_1 \sum x_i^2 + \sum x_i U_i$$

$$\therefore b_1 \sum x_i^2 - \beta_1 \sum x_i^2 = \sum x_i U_i$$

$$\therefore (b_1 - \beta_1) \sum x_i^2 = \sum x_i U_i$$

وبالتعويض مرة اخرى في العلاقة (25) عن $\sum x_i U_i$ بما يساويه

$$= -\frac{2}{n} E\left[(b_1 - \beta_1)(b_1 - \beta_1) \sum x_i^2\right] = -\frac{2}{n} E\left[(b_1 - \beta_1)^2 \sum x_i^2\right] = -\frac{2}{n} \sum x_i^2 \, Var(b_1)$$

$$= \frac{-2 \sum x_i^2}{n} \cdot \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2} = \frac{-2 \sigma_u^2}{n}$$

أما الحد الثالث من العلاقة (24)

$$\frac{1}{n} E\left[\sum (U_i - \overline{U})^2\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum \left(U_i^2 - 2 U_i \overline{U} + \overline{U}^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n} E\left[\sum U_i^2 - 2 \frac{(\sum U_i)^2}{n} + \frac{(\sum U_i)^2}{n}\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum U_i^2 - \frac{(\sum U_i)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n} E\left(\sum U_i^2\right) - E\left(\frac{(\sum U_i)^2}{n}\right) = \frac{1}{n} . n \sigma_u^2 - \frac{1}{n^2} . n \sigma_u^2$$

$$= \frac{1}{n} . n \sigma_u^2 - \frac{\sigma_u^2}{n} = \sigma_u^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

وبتعويض هذه النتائج في العلاقة (24) مرة اخرى نحصل على:

$$E(S_e^{*2}) = \frac{\sigma_u^2}{n} - \frac{2 \sigma_u^2}{n} + \frac{\sigma_u^2 (n-1)}{n}$$

$$\therefore E(S_e^{*2}) = \frac{\sigma_u^2}{n} . (n-2)$$

ويتضح من ذلك ان تباين العينة المقدر بطريقة أعظم الامكان متحيز بمقدار $\frac{(n-2)}{n}$ وعليه فأن الصيغة التقديرية الغير متحيزة لـ (σ_u^2) يمكن الحصول عليها بالشكل التالي:

$$\frac{n}{n-2}E\left(S_e^{*2}\right)=\sigma_u^2\left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{n}{n-2}\right)$$

$$\therefore E\left(\frac{n}{n-2}\frac{\sum e_i^2}{n}\right)=\frac{1}{n-2}\left(\sum e_i^2\right)=\sigma_u^2$$

اذن الصيغة التقديرية لتباين العينة (الغير متحيزة)

$$\therefore E\left(S_e^2\right)=E\left[\frac{\sum e_i^2}{n-k-1}\right]=\sigma_u^2 \quad \text{.......... (26)}$$

حيث أن

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

(k) تمثل عدد المتغيرات المستقلة والمساوية في النموذج الخطي البسيط إلى (1) .

(n) تمثل حجم لعينة.

تجدر الاشارة هنا، إلى ان تباين العينة (S_e^2) أعلاه، يمكن تقديره بصيغة اخرى أكثر استخداما في التطبيق العملي،ويتم ذلك من خلال استخدام القيم الاصلية لكل من المتغير المعتمد والمتغير المستقل في عملية التقدير وكالتالي:

$$S_e^2 = \frac{\sum Y_i^2 - b_0\sum Y_i - b_1\sum X_i\, Y_i}{n-k-1} \quad \text{.......... (27)}$$

إضافة إلى الصيغتين المرقمتين (26) (27) يمكن اشتقاق صيغ اخرى لتباين العينة ، فكما هو معلوم بأن أي مشاهدة حقيقية من مشاهدات المتغير المعتمد تعتمد اساسا على القيمة التقديرية مضافا" اليها الاخطاء الناتجة من الفرق بين القيمة الحقيقية (المشاهدة) والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد، هذا يعني:

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

وبأخذ الانحراف من الوسط الحسابي

$$Y_i - \overline{Y} = \hat{Y}_i - \overline{Y} + e_i - \overline{e}$$

$$\therefore y_i = \hat{y}_i + e_i$$

$$y_i^2 = \hat{y}_i^2 + 2\hat{y}_i e_i + e_i^2$$

$$\therefore \sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + 2\sum \hat{y}_i e_i + \sum e_i^2$$

وبما أن

$$\sum \hat{y}_i^2 = \sum \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2$$

$$= \sum \left(b_0 + b_1 X_i - \overline{Y}\right)^2$$

$$= \sum \left(\overline{Y} - b_1 \overline{X} + b_1 X_i - \overline{Y}\right)^2$$

$$\therefore \sum \hat{y}_i^2 = b_1^2 \sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = b_1^2 \sum x_i^2$$

وبالتعويض

$$\sum y_i^2 = b_1^2 \sum x_i^2 + 2b_1 \sum x_i e_i + \sum e_i^2 \quad \text{.......... (28)}$$

وبما ان الحد الوسط من الطرف الايمن للعلاقة (28) أعلاه مساويا إلى الصفر، وذلك لأن

$$2b_1 \sum x_i e_i = 2b_1 \sum x_i \left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = 0$$

وعليه فأن

$$\sum y_i^2 = b_1^2 \sum x_i^2 + \sum e_i^2$$

$$\therefore \sum e_i^2 = \sum y_i^2 - b_1^2 \sum x_i^2$$

وبالتعويض في العلاقة رقم (26) نحصل على:

$$S_e^2 = \frac{\sum y_i^2 - b_1^2 \sum x_i^2}{n - k - 1} \quad \text{.......... (29)}$$

وتجد الإشارة هنا إلى ان هناك أسلوب آخر لاشتقاق صيغة تباين العينة، فكما هو معلوم:

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$e_i = Y_i - \left(b_0 + b_1 X_i\right)$$

$$= Y_i - \left(\overline{Y} - b_1 \overline{X} + b_1 X_i\right)$$

$$= \left(Y_i - \overline{Y}\right) - \left(b_1 X_i - b_1 \overline{X}\right)$$

$$\therefore e_i = y_i - b_1 x_i$$

$$\therefore \sum e_i^2 = \sum \left(y_i - b_1 x_i\right)^2$$

$$= \sum y_i^2 - 2b_1 \sum x_i y_i + b_1^2 \sum x_i^2$$

$$= \sum y_i^2 - 2b_1 \sum x_i\, y_i + b_1 \sum x_i\, y_i$$

$$\therefore \sum e_i^2 = \sum y_i^2 - b_1 \sum x_i\, y_i$$

وبالتعويض مرة اخرى في الصيغة رقم (26) نحصل على

$$S_e^2 = \frac{\sum y_i^2 - b_1 \sum x_i\, y_i}{n-k-1} \quad \text{.......... (30)}$$

الصيغتان أعلاه رقم (29) و (30) متساويتان ويمكن الوصول إلى الصيغة رقم (30) مباشرة من الصيغة (29) وذلك بمجرد التعويض عن قيمة (b_1) بما تساويها.

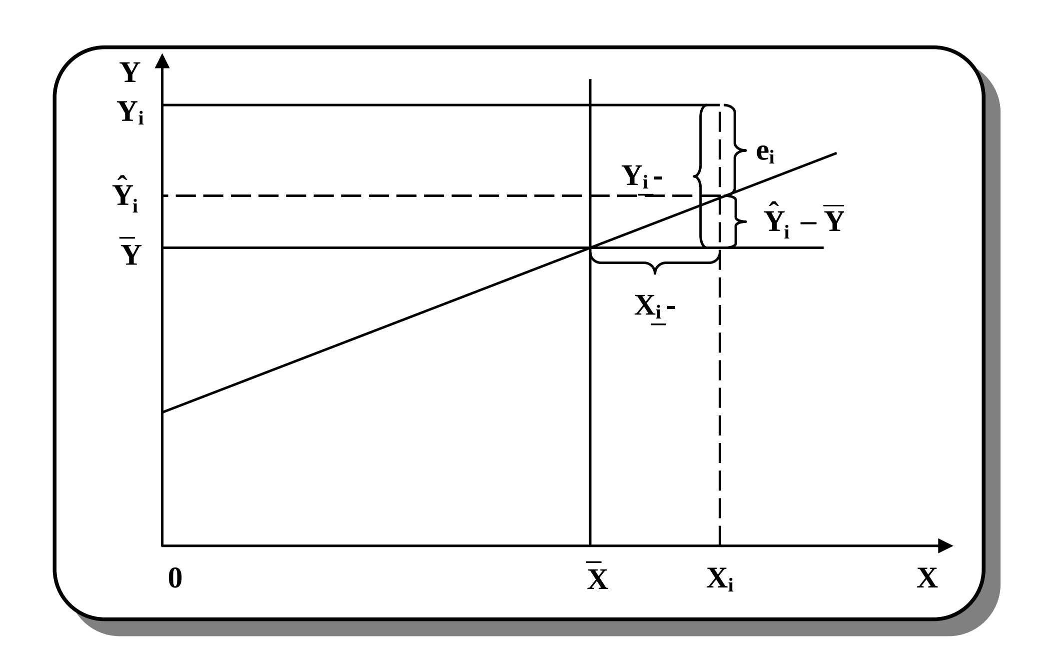
1.6 تحليل انحرافات المتغير المعتمد في النموذج الخطي البسيط

يمكن النظر إلى هذه الانحرافات على اساس تشتت قيم المتغير العشوائي المعتمد (Y_i) عند ثبوت قيم المتغير المستقل (X_i) من عينة إلى اخرى، ويمكن ان يعزى تشتت قيم (Y_i) عند مستوى معين للمتغير (X_i) إلى سببين:

أولهما: تأثير المتغير المستقل (X_i) على القيمة المتوقعة للمتغير المعتمد (Y_i).

ثانيهما: تأثير الخطأ الذي يأخذ قيما مختلفة من مشاهدة إلى اخرى.

عليه فإن مقدار الانحراف (Y_i-•Y) لأي مشاهدة من مشاهدات المتغير المعتمد، يمكن تجزئته إلى جزئين كما هو واضح من الشكل رقم (3).



شكل بياني رقم (3)

يتضح من الشكل البياني أعلاه، أن الانحرافات الكلية يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\left(Y_i - \overline{Y}\right) = \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right) + e_i$$

أي

$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$

$$\therefore \sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + 2\sum \hat{y}_i e_i + \sum e_i^2 \quad \text{.......... (31)}$$

وبما أن $\sum \hat{y}_i e_i = 0$ ، وبالتعويض عن قيمة $\sum \hat{y}_i^2$ بما تساويها نحصل على:

$$\sum y_i^2 = b_1^2 \sum x_i^2 + \sum e_i^2 \quad \text{.......... (32)}$$

حدود الصيغة رقم (32) أعلاه توضح المصادر الاساسية لبناء جدول تحليل التباين، حيث أن:

$\sum y_i^2$: تمثل الانحرافات الكلية **(Total Variation)**

$\sum \hat{y}_i^2 = b_1^2 \sum x_i^2$: تمثل الانحرافات الموضحة **(Explained Variation)**

$\sum e_i^2$: تمثل الانحرافات المتبقية (الغير موضحة) **(Unexplained Variation)**

ولغرض عرض المصادر الثلاثة أعلاه للانحرافات بدلالة معامل التحديد، لذا يستوجب أولا اشتقاق صيغة لمعامل التحديد **(Coefficient of Determination)**.

من العلاقة رقم (32) بعد تقسيم طرفيها على مجموع مربعات الانحرافات الكلية نحصل على:

$$\frac{\sum y_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

ويلاحظ من العلاقة أعلاه أن الحد الأول من الطرف الأيمن يمثل نسبة مربعات الانحرافات الموضحة إلى مربعات الانحرافات الكلية وهذا هو تعريف معامل التحديد (R^2).

$$\therefore 1 = R^2 + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \quad \text{.......... (33)}$$

أو

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

وبما ان المقدار

$$0 \leq \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \leq 1$$

إذن يمكن القول بأن قيمة معامل التحديد تنحصر بين $0 \leq R^2 \leq 1$ وبالرجوع إلى الصيغة رقم (33) واعادة ترتيبها نحصل على:

$$1 - R^2 = \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$\therefore (1 - R^2)\sum y_i^2 = \sum e_i^2 \quad \text{..........} \quad (34)$$

العلاقة رقم (34) أعلاه تبين مجموع مربعات الانحرافات الغير موضحة بدلالة معامل التحديد، وبالتعويض في العلاقة رقم (32) ، نحصل على مجموع مربعات الانحرافات الموضحة بدلالة معامل التحديد وكالاتي:

$$\sum y_i^2 = b_1^2 \sum x_i^2 + (1 - R^2)\sum y_i^2$$

$$\therefore b_1^2 \sum x_i^2 = R^2 \sum y_i^2 \quad \text{..........} \quad (35)$$

$$\therefore R^2 = \frac{b_1^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$

أو بصيغة اخرى بعد التعويض عن قيمة الميل الحدي (b_1)

$$\therefore R^2 = \frac{b_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

وباستخدام الصيغتين رقم (34) و (35) يمكننا بناء جدول تحليل التباين بدلالة معامل التحديد كالاتي:-

جدول تحليل التباين "ANOVA"

Sources of Variations مصدر الانحرافات	S.S. مجموع المربعات	D.f درجة الحرية	M.S.S متوسط مجموع المربعات
Explained Variations الانحرافات الموضحة	$R^2\sum y_i^2 = b_1 \sum x_i y_i$	k	$\frac{R^2 \sum y_i^2}{k}$
Unexplained Variations الانحرافات الغير موضحة (المتبقية)	$(1 - R^2)\sum y_i^2 = \sum y_i^2 - b_1 \sum x_i y_i$	n-k-1	$\frac{(1 - R^2)\sum y_i^2}{n - k - 1}$
Total Variations المجموع الكلي	$\sum y_i^2$	n-1	—

حيث ان:

$$F_0=\frac{\frac{R^2\sum y_i^2}{k}}{\frac{\left(1-R^2\right)\sum y_i^2}{n-k-1}}=\frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{\left(1-R^2\right)}{n-k-1}}$$

وبالتالي يمكن معرفة مدى معنوية العلاقة الخطية المفترضة بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل ، من خلال مقارنة قيمة (F_0) العملية مع قيمتها النظرية (الجدولية) لدرجة حرية مساوية إلى (k) ، $(n-k-1)$ ومستوى دلالة معين.

1.7 قياس فترات الثقة

سوف نتطرق في هذا الجزء إلى وضع حدود ثقة للمعالم المقدرة أولا ، ومن ثم حدود ثقة لأي مشاهدة من مشاهدات خط انحدار المجتمع ثانيا. بشكل عام يمكن استخدام مؤشر (t) لهذا الغرض وذلك لأن (σ_u^2) مجهول اضافة إلى انه في العينات الصغيرة $n \le 30$ يفضل استخدام احصاء (t) ، وعليه فأن:

$$t=\frac{b_0-\beta_0}{\sqrt{\hat{Var}\left(b_0\right)}}$$

و

$$t=\frac{b_1-\beta_1}{\sqrt{\hat{Var}\left(b_1\right)}}$$

وبما ان

$$P_r\left[\left(-t_{n-k-1},\frac{\lambda}{2}\right)\le t\le\left(+t_{n-k-1},\frac{\lambda}{2}\right)\right]=1-\lambda$$

حيث أن:

$(n-k-1)$ تمثل درجات الحرية.

(λ) تمثل مستوى المعنوية .

$(1-\lambda)$ تمثل معامل الثقة.

ومنه يمكن وضع حدود ثقة للحد الثابت .

$$P_r\left[\left(-t_{n-k-1},\frac{\lambda}{2}\right)\le\frac{b_0-\beta_0}{\sqrt{\hat{Var}\left(b_0\right)}}\le\left(+t_{n-k-1},\frac{\lambda}{2}\right)\right]=1-\lambda$$

$$\therefore P_r\left[b_0-\left(t_{n-k-1},\frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{\hat{Var}(b_0)}\le\beta_0\le b_0+\left(t_{n-k-1},\frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{\hat{Var}(b_0)}\right]=1-\lambda$$

أي أن:

$$\beta_0=b_0\pm\left(t_{n-k-1},\frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{\hat{Var}(b_0)}$$

وبنفس الاسلوب أعلاه يمكن وضع حدود ثقة للميل الحدي كالاتي:

$$\beta_1=b_1\pm\left(t_{n-k-1},\frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{\hat{Var}(b_1)}$$

أما فيما يتعلق باحتساب فترة الثقة لاي نقطة من نقاط النموذج المدروس، ولنفرض بأن النقطة المطلوب تقدير حدود الثقة لها هي (Y_0). وبما ان $(\hat{Y}_0)$ هي القيمة التقديرية لـ (Y_0)، اذن لابد من اعتماد $(\hat{Y}_0)$ في تقدير فترة الثقة للقيمة $E(Y_0)$ وهذا بدوره يتطلب اشتقاق وسط وتباين القيمة $(\hat{Y}_0)$، أي ان:

$$\hat{Y}_0=b_0+b_1X_0$$

$$\therefore E(\hat{Y}_0)=E(b_0)+X_0E(b_1)$$

$$=\beta_0+\beta_1X_0$$

$$\therefore Var(\hat{Y}_0)=E\left[\hat{Y}_0-E(\hat{Y}_0)\right]^2$$

$$=E\left[b_0+b_1X_0-\beta_0-\beta_1X_0\right]^2$$

$$=E\left[(b_0-\beta_0)+X_0(b_1-\beta_1)\right]^2$$

$$=E(b_0-\beta_0)^2+2X_0E(b_0-\beta_0)(b_1-\beta_1)+X_0^2E(b_1-\beta_1)^2$$

$$=Var(b_o)+2X_0Cov(b_0,b_1)+X_0^2Var(b_1)$$

$$=\sigma_u^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2}-2X_0\frac{\sigma_u^2\overline{X}}{\sum x_i^2}+X_0^2\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}\right)$$

$$=\frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}\left(\frac{\sum x_i^2}{n}+\overline{X}^2-2X_0\overline{X}+X_0^2\right)$$

$$\therefore Var(\hat{Y}_0) = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}\left[\frac{\sum x_i^2}{n} + (X_0 - \overline{X})^2\right] = \sigma_u^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

يتضح من أعلاه أن تباين $(\hat{Y}_0)$ يتغير من نقطة إلى اخرى ويكون في ادنى مستوى له عند تطابق قيمة (X_0) مع $(\overline{X})$ ويكون عندها مساويا إلى:

$$Var(\hat{Y}_0) = \frac{\sigma_u^2}{n}$$

في حين عندما تكون قيمة (X_0) مساوية للصفر عندها تتساوى قيمة تباين $(\hat{Y}_0)$ مع تباين الحد الثابت، أي أن:

$$Var(\hat{Y}_0) = Var(b_0) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2}\right)$$

وبما ان قيمة $(\hat{Y}_0)$ما هي الا عبارة عن تشكيلة خطية من مشاهدات المتغير العشوائي والمستقلة الواحدة عن الاخرى وتتوزع طبيعيا، أي ان

$$\hat{Y}_0 \sim N\left[(\beta_0 + \beta_1 X_0)\ ,\ \sigma_u^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum x_i^2}\right)\right]$$

أي أن:

$$t = \frac{\hat{Y}_o - E(Y_0)}{\sqrt{V\hat{a}r(\hat{Y}_0)}}$$

وبالتالي فأن حدود ثقة القيمة $E(Y_0)$ تحسب كالاتي:

$$P_r\left[\left(-t_{n-k-1}, \frac{\lambda}{2}\right) \le t \le \left(+t_{n-k-1}, \frac{\lambda}{2}\right)\right] = 1 - \lambda$$

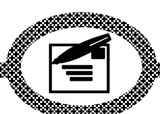
$$P_r\left[\left(-t_{n-k-1}, \frac{\lambda}{2}\right) \le \frac{\hat{Y}_0 - E(Y_0)}{\sqrt{V\hat{a}r(\overline{Y}_0)}} \le \left(+t_{n-k-1}, \frac{\lambda}{2}\right)\right] = 1 - \lambda$$

$$\therefore P_r\left[\hat{Y}_0 - \left(t_{n-k-1}, \frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{V\hat{a}r(\hat{Y}_0)} \le E(Y_0) \le \hat{Y}_0 + \left(t_{n-k-1}, \frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{V\hat{a}r(\hat{Y}_0)}\right] = 1 - \lambda$$

أي ان:

$$E(Y_0) = \hat{Y}_0 \pm \left(t_{n-k-1}, \frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{V\hat{a}r(\hat{Y}_0)}$$

ويطلق على فترة الثقة أعلاه لقيمة المتغير المعتمد (Y_0) المقابلة لقيمة المتغير المستقل (X_0) والواقعة ضمن مدى قيم المتغير المستقل (X_i) في العينة المدروسة بالاستقطاب الداخلي **(Interpolation)** . أما اذا كانت قيمة (X_0) واقعة خارج نطاق العينة، أي خارج مدى قيم (X_i) عندئذ يطلق على التنبؤ بقيمة (Y_0) بالاستقطاب الخارجي **(Extrapolation)** .



مثال تطبيقي (1)

البيانات التالية تمثل حصة الفرد العراقي من الدخل القابل للتصرف (X_t) ومتوسط استهلاك الفرد (Y_t) وذك خلال الفترة **1964-1980** ، البيانات مقاسة بالدينار وبالاسعار الثابتة.

السنة (t)	Y_t	X_t
1964	75.3	96.0
1965	85.0	103.4
1966	87.97	106.4
1967	82.0	105.7
1968	85.9	107.4
1969	81.4	101.8
1970	81.5	97.3
1971	84.9	95.2
1972	75.9	99.1
1973	57.5	94.2
1974	70.0	121.8
1975	127.5	151.7
1976	139.4	160.8
1977	148.0	162.7
1978	173.6	191.7
1979	174.6	237.95
1980	185.8	212.4

المصدر : وزارة التخطيط/ الجهاز المركزي للاحصاء/بغداد العراق

المطلوب:

أولا: تقدير معالم دالة الاستهلاك التالية:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t$$

مستخدما:-

a- طريقة القيم الاصلية (التقدير حول نقطة الاصل).

b- طريقة الانحرافات (التقدير حول نقطة المتوسط).

c - طريقة الدمج بين القيم الاصلية للمتغير (Y_t) وانحرافات قيم المتغير (X_t).

ثانيا: استخلاص كافة المؤشرات اللازمة لاعتماد الصيغة التقديرية لدالة الاستهلاك.

الحل:

من بيانات الجدول أعلاه يمكن الحصول على العمليات الحسابية التالية:

$$n = 17, \quad \sum Y_t = 1816.27, \quad \sum X_t = 2245.55$$

$$\sum Y_t X_t = 269159.988, \quad \sum X_t^2 = 330182.7025$$

$$\sum Y_t^2 = 221916.278, \quad \sum x_t\, Y_t = 29246.74685$$

ومنها يمكن الحصول على الانحرافات التالية:-

$$\sum x_t^2 = \sum X_t^2 - n\overline{X}^2 = 33565.36118$$

$$\sum y_t^2 = \sum Y_t^2 - n\overline{Y}^2 = 27867.05249$$

$$\sum x_t y_t = \sum X_t Y_t - n\,\overline{X}\,\overline{Y} = 29246.7491$$

1- تقدير معالم دالة الاستهلاك باستخدام القيم الاصلية

$$b_1 = \frac{n\sum X_t Y_t - \left(\sum X_t\right)\left(\sum Y_t\right)}{n\sum X_t^2 - \left(\sum X_t\right)^2} = 0.871337$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X} = -8.25654$$

وباستخدام الانحرافات نحصل على

$$b_1 = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_i^2} = 0.871337$$

وفي حالة استخدام اسلوب الدمج بين الانحرافات والقيم الاصلية

$$b_1 = \frac{\sum x_t Y_t}{\sum x_t^2} = 0.871337$$

اذن الصيغة التقديرية لدالة الاستهلاك تكون كالتالي:-

$$\hat{Y}_t = -8.25654 + 0.871337\ X_t$$

2- استخلاص المؤشرات اللازمة لاعتماد الصيغة التقديرية

تقدير تباين العينة (S_e^2) باستخدام البيانات الاصلية.

$$S_e^2 = \frac{\sum Y_t^2 - b_0 \sum Y_t - b_1 \sum X_t Y_t}{n-k-1} = 158.88498$$

ونفس التقدير أعلاه لتباين الخطأ يمكن الحصول عليه باستخدام الانحرافات ، أي أن:

$$S_e^2 = \frac{\sum y_t^2 - b_1^2 \sum x_t^2}{n-k-1} = \frac{\sum y_t^2 - b_1 \sum x_t y_t}{n-k-1} = 158.88498$$

$$\therefore S_e = 12.604958$$

تباين الحد الثابت (b_0)

$$V\hat{a}r(b_0) = S_e^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_t^2} \right] = 91.938396$$

$$\therefore S.E(b_0) = \sqrt{V\hat{a}r(b_0)} = 9.588451$$

تباين الميل الحدي للاستهلاك

$$V\hat{a}r(b_1) = \frac{S_e^2}{\sum x_t^2} = 0.004734$$

$$\therefore S.E(b_1) = \sqrt{V\hat{a}r(b_1)} = 0.068801$$

لاختبار مدى دقة الميل الحدي للاستهلاك المقدر، نضع الفرضية التالية:

فرضية العدم $H_0 : \beta_1 = 0$

الفرضية البديلة $H_1 : \beta_1 \neq 0$

$$t_0 = \frac{b_1}{\sqrt{V\hat{a}r(b_1)}} = 12.664557$$

وبمقارنة قيمة (t) العملية مع قيمتها الجدولية (النظرية) لدرجة حرية $(n-k-1)$ ومستوى دلالة 5% والمساوية إلى

$$t(15,\ 0.025) = 2.131$$

نجد ان قيمة (t)العملية أكبر من الجدولية ، وعليه نرفض فرضية العدم (H_0) القائلة بأن الدخل (X_t) لا يؤثر في متوسط انفاق الفرد (Y_t) ونأخذ بالفرض البديل والقائل بأن متغير الدخل يمارس تأثيره في متوسط انفاق الفرد.

أما حدود الثقة للميل الحدي للاستهلاك فتكون كالاتي:

$$P_r[\ell \le \beta_1 \le u] = 1-\lambda$$

حيث أن (ℓ) تمثل الحد الادنى، (u) تمثل الحد الاعلى.

$$\therefore \ell = b_1 - t\left(n-k-1, \frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{V\hat{a}r(b_1)} = 0.724722$$

$$u = b_1 + t\left(n-k-1, \frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{V\hat{a}r(b_1)} = 1.017952$$

$$\therefore P_r[0.724722 < \beta_1 < 1.017952] = 0.95$$

ولاختبار مدى معنوية العلاقة الخطية المفترضة لتقدير معالم دالة الاستهلاك،يستوجب بناء جدول تحليل التباين (ANOVA) وكالاتي:

لغرض وضع جدول تحليل التباين بدلالة معامل التحديد (R^2) لذا يجب أولا احتساب :-

$$R^2 = \frac{b_1 \sum x_t y_t}{\sum y_t^2} = \frac{b_1^2 \sum x_t^2}{\sum y_t^2} = 0.914477$$

وبدلالته تحسب الانحرافات الموضحة

$$R^2 \sum y_t^2 = 25483.77965$$

اما الانحرافات الغير موضحة

$$(1-R^2)\sum y_t^2 = 2383.27284$$

وبالتالي يمكن بناء جدول تحليل التباين وكالاتي:

جدول تحليل التباين (ANOVA)

S of V	d.f	SS	MSS	اختبار (F)
الانحرافات الموضحة	K=1	25483.77965	25483.77965	$F_0 = \frac{R^2/K}{(1-R^2)/(n-k-1)}$ $F_0 = 160.39149$
الانحرافات غير الموضحة	n-k-1=15	2383,27284	158,884856	
الانحرافات الكلية	n-1=16	27867,05249		

وبمقارنة قيمة (F_0) العملية مع نظيرتها الجدولية لدرجة حرية (k; n-k-1) أي (1) و (15) ومستوى دلالة (5%)والمساوية إلى (4.54). نجد ان قيمة (F_0) العملية أكبر من قيمة (F) الجدولية ، ومنه يستنتج ان العلاقة الخطية المفترضة لدالة الاستهلاك معنوية ، بعبارة اخرى، نقبل الفرضية البديلة $H_1 : \beta_1 \neq 0$ الانفة الذكر والقائلة بأن المتغير المستقل (X_t) يمارس تأثيره في المتغير المعتمد (Y_t).

وفيما يلي الصيغة التقديرية الكاملة للعلاقة بين حصة الفرد العراقي من الدخل القابل للتصرف ومتوسط انفاق الفرد العراقي خلال الفترة (1964-1980).

$$\hat{Y}_t = -8.25654 + 0.871337\ X_t \qquad R^2 = 0.91447$$

$$S.E \quad (9.58845)\ (0.06880) \qquad F_0 = 160.39149$$

يتضح من معالم دالة الاستهلاك المقدرة أعلاه، أن الميل الحدي للاستهلاك مساويا إلى $b_1 = 0.871337$ ويعتبر هذا المؤشر مرتفع قليلا مقارنة بنمط انفاق المستهلك العراقي خلال الفترة المدروسة، وهذا يعني زيادة في دخل الفرد العراقي بمقدار دينار واحد تؤدي إلى زيادة في انفاقه بمقدار (0.871) فلس تقريبا، ويمكن ان يعزى هذا الارتفاع نتيجة لحذف بعض المتغيرات مثل السعر ونمط انفاق الفرد السابق.

1.8 تحليل دوال الطلب

تعرف العلاقة التي تربط بين كمية طلب المستهلك من سلعة معينة والعوامل المؤثرة على ذلك الطلب بدالة الطلب ويمكن التعبير عن تلك العلاقة بالشكل التالي:

$$Y_{ij} = f_i\left(P_1, P_2, ..., P_n, X_j\right) \quad ......(36)$$

حيث ان:

Y_{ij} تمثل طلب المستهلك (j) على السلعة (i)

P_i يمثل سعر السلعة (i)

X_j تمثل دخل المستهلك (j)

$$i = 1, 2, ..., n, \qquad j = 1,2, ..., J$$

وتستخدم مرونة الطلب الدخلية لقياس مدى استجابة الطلب للتغير الحاصل في الدخل ، وتعرف هذه المرونة بأنها النسبة المئوية للتغير في كمية الطلب على السلعة عند تغير الدخل بنسبة (1%)ويعبر عنها كالاتي:

$$\eta_i = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X}{X}} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y} \quad ......(37)$$

حيث ان

- η_i تمثل مرونة الطلب الدخلية للسلعة (i)
- Δ ترمز إلى مقدار التغير ، أي

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1 \quad , \qquad \Delta X = X_2 - X_1$$

وفي ضوء المرونة الدخلية ، يمكن تصنيف السلع إلى ثلاثة أنواع وكالاتي:

كمالية اذا كانت $\eta_i > 1$

ضرورية اذا كانت $0 < \eta_i < 1$

متدنية اذا كانت $\eta_i < 0$

يتضح من التصنيف أعلاه للسلع بأن السلع الكمالية تتصف بأن الطلب عليها يرتفع بنسبة أكبر من نسبة ارتفاع الدخل، في حين ان الطلب على السلع الضرورية يرتفع بنسبة أقل من نسبة ارتفاع الدخل وذلك نتيجة لتوجه المستهلك نحو السلع الكمالية، اما بالنسبة للسلع المتدنية فأن الطلب عليها ينخفض بارتفاع الدخل وذلك لتحول المستهلك إلى سلع أخرى ذات مواصفات اكثر جودة من السلع المتدنية.

وتجدر الإشارة هنا إلى ان مرونة الطلب الدخلية المعطاة بموجب الصيغة رقم (37) تعبر عن التغير في الطلب عند تغيير الدخل في نقطة معينة ، ويمكن الحصول على نفس المؤشر بتفاضل دالة الطلب المرقمة (36) وكالاتي:

$$\eta_i = \frac{d\,Y_{ij}}{d\,X_j} \cdot \frac{X_j}{Y_{ij}} \quad \text{.......... (38)}$$

علما بأن

$$\frac{d\,Y_{ij}}{d\,X_j} = \frac{\Delta\,Y}{\Delta\,X} = \text{MPC}$$

حيث ان

(η_i) تمثل مرونة الطلب الدخلية.

(MPC) تعني الميل الحدي للاستهلاك (**Marginal propensity to consume**) ، ويعرف بأنه نسبة التغير الحاصل في الطلب إلى التغير الحاصل في الدخل .

عليه يمكن القول بأن مرونة الطلب الدخلية تساوي الميل الحدي للاستهلاك مضروبا في نسبة الدخل إلى الطلب . وبما ان الميل الحدي للاستهلاك يتغير بتغير الطلب وهذا بدوره يؤدي إلى تغير المرونة الدخلية عند كل مستوى من مستويات الدخل ، لذا يفضل اعادة كتابة الصيغة رقم (38) بشكلها العام لتأخذ بنظر الاعتبار كافة التغيرات التي يمكن ان تحدث في مختلف المستويات.

$$\eta_i = \frac{d\,Y_{ij}}{d\,X_j} \cdot \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \quad \text{.......... (39)}$$

اضافة إلى مؤشر المرونة الدخلية أعلاه ، هناك مؤشر اخر يمكن الوصول اليه من خلال دالة الطلب رقم (36)، ويعرف بمرونة الطلب السعرية والتي تقيس مدى استجابة الطلب للتغير في السعر، علما أنه اذا كان السعر هو سعر السلعة ذاتها عندئذ تعرف تلك المرونة بمرونة الطلب السعرية المباشرة أو الذاتية (**Own or Direct Price Elasticity**) والتي تعني النسبة المئوية للتغير في كمية الطلب على السلعة عند تغير سعر السلعة ذاتها بنسبة (1%) ويعبر عنه رياضيا كالاتي:

$$\eta_{ii} = \frac{d\,Y_{ij}}{d\,P_i} \cdot \frac{P_i}{Y_{ij}} \quad \text{.......... (40)}$$

حيث ان η_{ii} تمثل مرونة الطلب السعرية المباشرة.

وتقاس مدى استجابة كمية الطلب على السلعة للتغير في سعر سلعه اخرى بمرونة الطلب السعرية الغير مباشرة أو التبادلية (**Indirect or cross price elasticity**) وتحسب بموجب الصيغة التالية:

$$\eta_{ir} = \frac{d\,Y_{ij}}{d\,P_r} \cdot \frac{P_r}{Y_{ij}} \qquad (41)$$

حيث ان

η_{ir} تمثل مرونة الطلب السعرية الغير مباشرة.

من الصيغة أعلاه يتضح بأن مرونة الطلب الغير مباشرة للسلعة (**i**) بالنسبة لسعر السلعة (**r**)، $i \neq r$ تساوي النسبة المئوية للتغير في الطلب على السلعة (**i**) عند تغير سعر السلعة (**r**) بنسبة (**1%**).

وتجدر الاشارة هنا إلى ان المرونة الدخلية والمرونات السعرية بشقيها التبادلية والذاتية ما هي الا عبارة عن مؤشرات خالية من الوحدات القياسية وعليه يمكن استخدامها لاغراض المقارنة حتى وان كانت تخص سلع ذات وحدات قياسية مختلفة او بلدان ذات عملات محلية متباينة.

يعتمد تحليل دالة الطلب المرقمة (**36**)على ثلاثة أنواع رئيسية من البيانات، النوع الاول يمثل بيانات مقطعية (**Cross-section data**) يكون مصدرها الاساسي هو بحوث ميزانية الاسرة، حيث تجمع بيانات عن الانفاق والدخل والجوانب الاخرى ذات العلاقة من عينة من الاسر. أما النوع الثاني فيمثل بيانات السوق والتي تكون عادة بشكل سلاسل زمنية (**Time-series data**) ، أما النوع الثالث يجمع ما بين البيانات المقطعية وبيانات السلاسل الزمنية (**Pooling data**) ويمكن استخدام النوع الثاني والثالث من البيانات لتحليل تغيرات الاسعار بشكل مباشر في حين يساعد النوع الاول من البيانات وفي ظل افتراضات معينة على تقدير المرونات السعرية ومرونات الاحلال والادخار وذلك بأتباع اساليب قياسية معينة لا مجال لذكرها هنا. وبما ان بحوث ميزانية الاسرة تجري في فترة قصيرة نسبيا فأنه يفترض عدم حصول تغيرات في اسعار السلع خلال فترة البحث ويترتب على مثل هذا الافتراض تحويل دالة الطلب المرقمة (**36**) إلى الصيغة التالية والتي تعرف بدالة انجل (**Engel function**).

$$Y_{ij} = f_i\left(X_j\right) \qquad (42)$$

العلاقة أعلاه تمثل نقطة البداية في تحليل طلب المستهلك حيث انها تعبر عن الطلب كدالة في الدخل في ظل افتراض ثبات الاسعار ، وقد اطلقت عليها التسمية أعلاه نسبة إلى العالم الالماني ارنست انجل (**Ernst Engel**) . وتأخذ العلاقة رقم (**42**) صيغا مختلفة قد تكون

خطية أو غير خطية وذلك حسب سلوك المستهلك تجاه السلعة عند تغير دخله، الامر الذي يقضي (يستوجب) تحديد الصيغة الملائمة للسلعة أولا ومن ثم تحليل الطلب على تلك السلعة ثانيا. ومن أهم صيغ دوال انجل هو ما يعرف بالصيغة الخطية (Linear Form) التالية:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_j + U_{ij} \quad \text{......} \quad (43)$$

وبموجب هذه الصيغة الخطية يكون الميل الحدي للاستهلاك ثابتا حيث ان المشتقة الاولى لها تساوي:

$$\frac{d\,Y_{ij}}{d\,Y_j} = \beta_1 = MPC$$

وبالتعويض في الصيغة رقم (39) ، نجد ان مرونة الطلب الدخلية بموجب هذه الصيغة تساوي:

$$\eta_i = \frac{d\,Y_{ij}}{d\,X_j} \cdot \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \beta_1 \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$$

ومن صيغ دوال انجل غير الخطية هي الصيغة التالية:

$$Y_{ij} = \beta_0\, X_j^{\beta_1} . e^{U_{ij}} \quad \text{......} \quad (44)$$

والتي يمكن تحويلها إلى صيغة خطية وذلك بأخذ اللوغارتيم إلى طرفيها وعندها تعرف بالصيغة اللوغارتمية المزدوجة (Double –Logarithmic Form) وكالاتي:

$$\ln Y_{ij} = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_j + U_{ij} \quad \text{......} \quad (45)$$

حيث ان (ln) تعني اللوغارتيم الطبيعي للأساس (e) ويحسب الميل الحدي للاستهلاك من الصيغة أعلاه كالاتي:

$$MPC = \frac{d\,Y_{ij}}{d\,X_j} = \beta_1 \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$$

وبالتعويض مرة اخرى في الصيغة رقم (39) نحصل على مرونة الطلب الدخلية وكالاتي:

$$\eta_i = \frac{d\,Y_{ij}}{d\,X_j} \cdot \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$$

$$= \beta_1 \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} \cdot \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \beta_1$$

وتجد الاشارة هنا إلى ان الدالة رقم (42) الانفة الذكر يمكن ان تأخذ عدة صيغ رياضية اضافة إلى الصيغتين أعلاه ، وفيما يلي بعض هذه الصيغ مع بيان الميل الحدي للاستهلاك (MPC) والمرونة الدخلية ($\bullet_i$) مصنفة حسب نوع الصيغة:

نوع الدالة	الصيغة	MPC	$\bullet_i$
1- الخطية	$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_j + U_{ij}$	β_1	$\beta_1 \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$
2- نصف اللوغارتمية	$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \ln X_j + U_{ij}$	$\frac{\beta_1}{\overline{X}}$	$\frac{\beta_1}{\overline{Y}}$
3- اللوغارتيمة المزدوجة	$\ln Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \ln X_j + U_{ij}$	$\beta_1 \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$	β_1
4- الدالة العكسية	$Y_{ij} = \beta_0 - \frac{\beta_1}{X_j} + U_{ij}$	$\frac{\beta_1}{\overline{X}^2}$	$\frac{\beta_1}{\overline{X}\overline{Y}}$
5- اللوغارتمية العكسية	$\ln Y_{ij} = \beta_0 - \frac{\beta_1}{X_j} + U_{ij}$	$\beta_1 \frac{\overline{Y}}{\overline{X}^2}$	$\frac{\beta_1}{\overline{X}}$
6- النسبية نصف اللوغارتمية	$\frac{Y_{ij}}{X_j} = \beta_0 + \beta_1 \ln X_j + U_{ij}$	$\beta_1 \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$	$1 + \beta_1 \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$
7- الجذرية الخ...	$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{X_j} + U_{ij}$ الخ....	$\frac{\beta_1}{2\sqrt{\overline{X}}}$	$\frac{\beta_1 \sqrt{\overline{X}}}{2\overline{Y}}$

تعتبر المرونة الدخلية والحاصل عليها من الصيغ المختلفة لدوال انجل مؤشر اساسي في المجال التخطيطي ، حيث يمكن توظيف هذا المؤشر لأغراض التنبؤ بالطلب في ضوء التغير المتوقع في الدخل وبالتالي وضع خطط الانتاج وخطة التجارة الخارجية وتحديد سياسات الاسعار والدخول. وتشتق صيغة التنبؤ هذه من تعريف مرونة الطلب الدخلية ذاتها. بالرجوع إلى الصيغة رقم (37) وباعتبار ان (Y_{ij}) و (X_j) تعود لفترة اساس مناسبة تتوفر عنها البيانات المطلوبة ، عندئذ يستخرج طلب المستهلك المقدر في الفترة (t) كالاتي:

$$\eta_i = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X_0}{Y_{i0}}$$

حيث ان

X_0 : تمثل متوسط دخل الفرد في سنة الاساس.

Y_{i0} : تمثل متوسط الانفاق على المجموعة السلعية (i) في سنة الاساس.

$$\therefore \Delta Y X_0 = \eta_i \, \Delta X \, Y_{i0}$$

$$\Delta Y = \frac{\eta_i \, \Delta X \, Y_{i0}}{X_0}$$

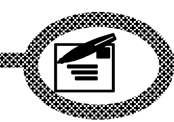
$$\therefore Y_{it} - Y_{i0} = \frac{\eta_i \, \Delta X \, Y_{i0}}{X_0}$$

$$Y_{it} = Y_{io} + \eta_i \left(\frac{\Delta X}{X_0} \right) Y_{io}$$

أو

$$Y_{it} = Y_{i0} \left(1 + \eta_i \frac{\Delta X}{X_0} \right) \qquad (46)$$

أي ان الطلب المتوقع للفرد على المجموعة السلعية (i) في الفترة (t) يساوي طلبه في فترة الأساس لتلك السلعة مضافا اليه التغير في الطلب نتيجة لتغير الدخل.



مثال تطبيقي (2)

بوبت الاسر الحضرية المشمولة في بحث ميزانية الاسرة لعام (1979) وفق الفئات المبينة في الجدول التالي المتضمن متوسط دخل الفرد ومتوسط انفاقه الشهري على مجموعة المواد الغذائية في قطاع الحضر العراقي.

فئة دخل الفرد (دينار / شهر)	انفاق الفرد على المواد الغذائية (دينار/شهر)	دخل الفرد (دينار/ شهر)
4 فأقل	6.10	10.20
6 -	5.48	10.32
8 -	6.09	10.50
10 -	6.83	12.40
12 -	7.41	13.84
14 -	7.59	14.81
16 -	8.15	15.86
-18	9.00	18.31
20 -	9.15	18.47
25 -	9.76	20.65
30 -	10.40	22.96
35 -	11.43	26.22
-40	11.74	27.88
45 -	12.67	29.81
-50	14.07	34.75
أكثر من 50	15.63	48.40
كافة الفئات	9.46 (Yij)	20.96 (X_j)

المصدر: وزارة التخطيط ، الجهاز المركزي للاحصاء . بغداد – العراق.

<u>المطلوب:</u>

تقدير الميل الحدي للاستهلاك ومرونة الطلب الدخلية باستخدام الصيغ التالية لدوال أنجل.

1. $$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_j + U_{ij}$$

2. $$\ln Y_{ij} = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_j + U_{ij}$$

3. $$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \ln X_j + U_{ij}$$

ثم قارن بين النتائج التي تحصل عليها وبين أي دالة أكثر ملائمة لنمط إنفاق المستهلك.

الحـــل:

العمليات الحسابية التالية تم الحصول عليها من الجدول أعلاه.

$$\sum X_j = 335.38, \qquad \sum X_j^2 = 8670.4962, \qquad \overline{X} = 20.96$$

$$\sum Y_{ij} = 151.5, \qquad \sum Y_{ij}^2 = 1569.3194, \qquad \overline{Y} = 9.46$$

$$\sum Y_{ij} X_j = 3635.8734, \qquad \sum \ln Y_{ij} \ln X_j = 105.2052$$

$$\sum \ln Y_{ij} = 35.14, \qquad \sum \ln X_j = 46.92, \qquad n = 16$$

$$\sum Y_{ij} \ln X_j = 464.94, \qquad \sum (\ln X_j)^2 = 140.798$$

$$\sum (\ln Y_{ij})^2 = 78.6482$$

أولا: تقدير المؤشرات الخاصة بالصيغة الخطية

$$b_1 = \frac{n\sum Y_{ij}X_j = \sum Y_{ij} \sum X_j}{n\sum X_j^2 - \left(\sum X_j\right)^2} = 0.28$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X} = 3.59$$

$$\therefore \hat{Y}_{ij} = 3.59 + 0.28 X_j$$

$$MPC = b_1 = 0.28$$

$$\eta = b_1 . \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = 0.62$$

$$R^2 = \frac{b_1 \sum x_j y_{ij}}{\sum y_{ij}^2}$$

$$\sum x_i y_{ij} = \sum X_j Y_{ij} - n \overline{X}\,\overline{Y} = 463.3678$$

$$\sum y_{ij}^2 = \sum Y_{ij}^2 - n\,\overline{Y}^2 = 137.4538$$

$$\therefore R^2 = 0.94$$

$$Fo_{(k),\,(n-k-1)} = \frac{R^2 / k}{\left(1 - R^2\right)/\left(n-k-1\right)} = 219.63$$

ثانيا: تقدير المؤشرات الخاصة بالصيغة نصف اللوغارتمية

$$b_1 = \frac{n\sum Y_{ij} \ln X_j - \left(\sum \ln X_j\right)\left(\sum Y_{ij}\right)}{n\sum\left(\ln X_j\right)^2 - \left(\sum \ln X_j\right)^2} = 6.45$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\,\overline{\ln X} = -9.45$$

$$\therefore \hat{Y}_{ij} = -9.45 + 6.45 \ln X_j$$

$$MPC = \frac{b_1}{\overline{X}} = 0.31$$

$$\eta = \frac{b_1}{\overline{Y}} = 0.68$$

$$R^2 = \frac{b_1 \sum y_{ij} \ln x_i}{\sum y_{ij}^2}$$

$$\sum y_{ij} \ln x_j = \sum Y_{ij} \ln X_j - n\,\overline{Y}\,\overline{\ln X} = 20.6268$$

$$\therefore R^2 = 0.97$$

$$Fo_{(k)(n-k-1)} = \frac{R^2 / K}{\left(1 - R^2\right)/\left(n-k-1\right)} = 453.27$$

ثالثا: تقدير المؤشرات الخاصة بالصيغة اللوغارتمية المزدوجة

$$b_1 = \frac{n\sum \ln Y_{ij} \ln X_j - \left(\sum \ln X_j\right)\left(\sum \ln Y_{ij}\right)}{n\sum\left(\ln X_j\right)^2 - \left(\sum \ln X_j\right)^2} = 0.67$$

$$b_0 = \overline{\ln Y} - b_1\,\overline{\ln X} = 0.23$$

$$\therefore \ln \hat{Y}_{ij} = 0.23 + 0.67\ \ln X_j$$

ويمكن وضع الصيغة التقديرية أعلاه ، بشكلها غير الخطي وكالاتي:-

$$\text{Anti}-\ln(b_0) = \text{Anti}-\ln(0.23) = 1.26$$

$$\therefore \hat{Y}_{ij} = 1.26\, X_j^{0.67}$$

$$MPC = \frac{b_1\, \overline{Y}}{\overline{X}} = 0.30$$

$$\eta = b_1 = 0.67$$

$$R^2 = \frac{b_1 \sum \ln x_j \ln y_{ij}}{\sum (\ln y_{ij})^2}$$

$$\sum \ln y_{ij} \ln x_j = \sum \ln X_j \ln Y_{ij} - n\,\overline{\ln Y}\ \overline{\ln X} = 2.15715$$

$$\sum (\ln y_{ij})^2 = \sum (\ln Y_{ij})^2 - n\left(\overline{\ln Y}\right)^2 = 1.472$$

$$\therefore R^2 = 0.98$$

$$Fo_{(k)(n-k-1)} = \frac{R^2 / K}{(1-R^2)/(n-k-1)} = 690.14$$

وبعد تقدير معالم الصيغ المختلفة لدوال انجل واحتساب بعض المؤشرات الاحصائية والاقتصادية الخاصة بكل صيغة، يمكن المقارنة بين النتائج واختيار الدالة الاكثر ملائمة لسلوك نمط انفاق المستهلك على مجموعة المواد الغذائية ويتم ذلك وفق نوعين من المعايير، المعايير الاقتصادية والمعايير الاحصائية ، وتتلخص المعايير الاقتصادية بمدى اتفاق نتائج الصيغة المقدرة مع ما تمليه النظرية الاقتصادية، اذ ينبغي ان تكون قيمة المرونة متوافقه مع طبيعة السلعة من حيث كونها كمالية او ضرورية او متدنية، اضافة إلى ذلك يستوجب توافق قيم الميل الحدي للاستهلاك ومستوى الاشباع.

أما فيما يتعلق بالمعايير الاحصائية فأهمها معامل التحديد (R^2) والذي بموجبه يمكن معرفة قدرة الدالة التفسيرية ومدى منطقية وتحقق الافتراضات الخاصة بكل دالة ،حيث انه كلما كان هذا المؤشر ذات قيمة عالية دل ذلك على ان الدالة اكثر قدرة للتعبير عن العلاقة ما بين الطلب والدخل.

وتجدر الاشارة هنا الى ان قيم معامل التحديد هذا ينبغي ان تحسب جميعها على اساس تجانس قيم المتغير المعتمد ولجميع الدوال ، اذ لا تصح المقارنة حينما يكون معامل التحديد محسوب على اساس ان المتغير المعتمد هو (Y_{ij}) بالنسبة للدالة الخطية ونصف اللوغارتمية في

حين يأخذ المتغير المعتمد القيمة ($\ln Y_{ij}$) في حالة الدالـة اللوغارتمية المزدوجة. ويمكن تحقيق الاتساق ما بين معامل التحديد (R^2) للدوال المختلفة عن طريق إيجاد معامل التحديد المصحح ويتم ذلك وفق الصيغة التالية:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{n - k - 1} \quad \text{.....(50)}$$

وبالتطبيق على مثالنا الانف الذكر ولكافة الصيغ المقدرة نجد قيمة معامل التحديد المصحح في حالة الصيغة الخطية مساويا إلى $\overline{R}^2 = 0.93$. وفي حالة الصيغة نصف اللوغارتيمية مساويا إلى $\overline{R}^2 = 0.96$ واخيرا قي حالة الصيغة اللوغارتيمية المزدوجة $\overline{R}^2 = 0.97$.

أما فيما يتعلق بالافتراضات الخاصة بالدوال المختلفة والتي تدور حول شكل الدالة المفترضة ، فيمكن التعرف عليها من خلال اختبار (Fo) المقدرة لكافة الصيغ تحت البحث والمعروضة في الجدول ادناه ، علما بأن الافتراض الخاص بمشكلة عدم تجانس التباين بالنسبة للبيانات المقطعية سوف يتم مناقشته في الفصل الثالث من هذا الكتاب، الجدول التالي يبين المؤشرات النهائية والتي على اساسها يمكن المفاضلة بين الصيغ الثلاث المقدرة لمجموعة المواد الغذائية للمستهلك العراقي في قطاع الحضر.

الصيغة التقديرية	MPC	•I	•R^2	العملية (Fo)
1. $\hat{Y}_{ij} = 3.594 + 0.28X_j$	.023	0.62	0.93	219.63
2- $\hat{Y}_{ij} = -9.45 + 6.45 \ln X_j$	.031	0.68	0.96	453.27
3- $\ln \hat{Y}_{ij} = 0.23 + 0.67 \ln X_j$	0.30	0.67	0.97	690.14

ملاحظة: قيمة (F) النظرية لدرجة حرية (1) و (14) ومستوى دلالة (5%) مساويا إلى (4.60).

التمارين



1 ما هي الافتراضات الخاصة بعنصر الخطأ العشوائي في معادلة انحدار بسيط، اشرح بالتفصيل معنى كل فرض منها.

2 ما هوالفرق فيما اذا كان تقدير معلمة معينة معنوي احصائيا وبين ان يكون التقدير غير متحيز.

3 اثبت بان الحد الثابت (b_0) المقدر بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) ، هو افضل تقدير خطي غير متحيز (BLUE) لـ (β_0) في النموذج التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

حيث ان

$$U_i \sim N\left(0, \sigma_u^2\right), \qquad E\left(U_i U_j\right) = 0 \quad \forall \; i \neq j$$

4 الجدول التالي يبين استيرادات العراق والناتج المحلي الاجمالي.

السنة	Y_i	X_i
1976	1.2	5.2
1977	1.3	5.9
1978	1.5	7.0
1979	1.7	11.2
1980	2.2	15.6
1981	2.3	11.2
1982	2.9	12.6
1983	1.9	12.5

حيث ان

(Y_i) تمثل الاستيرادات بليون دينار

(X_i) تمثل الناتج المحلي الاجمالي بليون دينار

المطلوب:

توفيق علاقة للاستيرادات بدلالة الناتج المحلي الاجمالي مستخدما

a. $$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

b. $$Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} U_i$$

---

5 اثبت بأن الميل الحدي (b_1) والحد الثابت (b_0) المقدر بطريقة (**OLS**) هو افضل تقدير خطي غير متحيز (**BLUE**) لـ (β_0) و (β_1) في النموذج الخطي التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

ثم بين بأنهما مقدرات كفوءة ومتسقة بنفس الوقت . علما بأن

$$U_i \sim N(0, \sigma_u^2), \quad E(U_i U_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

---

6 للنموذج الخطي التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

حيث ان

$$U_i \sim N(0, \sigma_u^2), \; E(U_i U_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

اثبت بأن دالة الامكان الاعظم

$$MLE = (2\pi\sigma_u^2)^{-\frac{n}{2}} . e^{-\frac{\sum U_i^2}{2\sigma_u^2}}$$

تعطي تقدير غير متحيز لكل من الحد الثابت (β_0) والميل الحدي (β_1) ، وتقديرا متحيزا لتباين العينة، ما هو مقدار هذا التحيز وكيف يتم معالجته.

---

7 بلغت مرونة الطلب الدخلية لسلعة معينة (**1.30**) وقد بلغ متوسط استهلاك الفرد من السلعة (**14**) كغم في سنة الأساس (**1982**) فما هو مقدار الطلب الكلي على السلعة في سنة (**1999**) ، علما بأن دخل الفرد المتوقع سوف يرتفع بنسبة (**20%**) ، خلال الفترة (**1980-1999**) وان عدد سكان العراق المتوقع عام (**1999**) سوف يبلغ (**28**) مليون نسمة.

8 لنموذج الانحدار البسيط التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

حيث ان

$$U_i \sim N\left(0, \sigma_u^2\right), E\left(U_i U_j\right) = 0 \quad \forall \; i \neq j$$

أثبت بأن مقدرات (OLS) لمعالم النموذج أعلاه غير متحيزة ، أي أن

$$E\left(b_0\right) = \beta_0, E\left(b_1\right) = \beta_1.$$

9 لنموذج الانحدار البسيط التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

حيث أن

$$U_i \sim N\left(0, \sigma_u^2\right), E\left(U_i U_j\right) = 0 \; \forall \; i \neq j$$

أشتق صيغة لتقدير تباين الميل الحدي، أي ايجاد $Var\left(b_1\right)$ ، وتباين الحد الثابت أي ايجاد $Var\left(b_0\right)$.





النموذج الخطي العام (GLM)
The General Linear Model (GLM)

2.1 التقدير حول نقطة الأصل

معظم البحوث الاقتصادية والاجتماعية تتطلب دراسة العلاقة بين اكثر من متغيرين، على سبيل المثال دالة الإنتاج والتي توصف بأنها دراسة للعلاقة بين عناصر الإنتاج والناتج، فإذا حددت عناصر الإنتاج بالعمل ورأس المال الثابت، فإن دالة الانتاج يمكن وضعها على النحو التالي:

$$Q_i = f(L_i, K_i)$$

حيث ان:

(Q_i) تمثل الناتج مقاسا بالقيمة او بالكمية.

(L_i) يمثل الأجور ويقاس بمعدل عدد العاملين.

(K_i) يمثل رأس المال الثابت.

ومن الأمثلة الأخرى التي توضح العلاقة بين أكثر من متغيرين، ما يعرف بدالة الطلب على سلعة معينة، فالكمية المطلوبة من أي سلعة يعتمد أساسا على سعر السلعة وعلى دخل المستهلك، أي أنه:

$$Y_i = f(X_{i1}, X_{i2})$$

حيث ان

(Y_i) تمثل الانفاق على المجوعة السلعية (i).

(X_{i1}) تمثل دخل المستهلك.

(X_{i2}) تمثل سعر السلعة.

يستند النموذج الخطي العام على افتراض وجود علاقة خطية ما بين متغير معتمد (Y_i) وعدد من المتغيرات المستقلة (المتغيرات المفسرة).

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$

وحد عشوائي (U_i) ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لـ (n) من المشاهدات و (k) من المتغيرات بالشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + U_i \quad \ldots\ldots (1)$$

$i=1, 2, \ldots, n, \qquad j=0, 1, 2, \ldots, k$

النموذج أعلاه يمكن كتابته بشكل مختصر وكالاتي:

$$Y_i = \sum_{j=0}^{k} \beta_j X_{ij} + U_i$$

حيث ان $X_{io}=1$

النموذج رقم (1) يتضمن (K+1) من المعالم المطلوب تقديرها علما بأن الحد الأول منها (β_0) يمثل الحد الثابت، الأمر الذي يقتضي اللجوء إلى استخدام المصفوفات والموجهات لتقدير تلك المعالم، أي انه:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (2)$$

المصفوفات والموجهات في الصيغة رقم (2) أعلاه ، يمكن ان توضع بشكل مختصر وكالاتي:

$$Y = X\beta + U \quad \ldots\ldots (3)$$

حيث ان

(Y) موجه ذو (n x 1) لمشاهدات المتغير المعتمد.

(X) مصفوفة ذات أبعاد ((n x (k+1) لمشاهدات المتغيرات المستقلة علما بأن العمود الاول من هذه المصفوفة يمثل الحد الثابت.

(β) موجه ذو (k+1) x 1)) للمعالم المطلوب تقديرها ، علما بأن العنصر الأول منه يمثل الحد الثابت للنموذج المدروس.

(U) موجه ذو (n x 1) للأخطاء العشوائية

2.2 تقديرات (OLS) في حالة (GLM)

لإيجاد تقدير لعناصر موجه (•) يستوجب تحقق الفروض الأساسية المارة الذكر في الفصل الأول ، بشكل عام و لــ (k) من المتغيرات المستقلة ، موجه الحد العشوائي (U) في النموذج رقم (3) أعلاه يتوزع بشكل طبيعي وتوقعه مساويا إلى الصفر، أي:

$$E(U) = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ \vdots \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{var}(U) = E(UU') = E\left(\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_n \end{bmatrix} \right)$$

$$\therefore \text{var}(U) = \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1 U_2) & \cdots & E(U_1 U_n) \\ E(U_2 U_1) & E(U_2^2) & \cdots & E(U_2 U_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(U_n U_1) & E(U_n U_2) & \cdots & E(U_n^2) \end{bmatrix}$$

ومن الفروض الاساسية للنموذج الخطي البسيط، لدينا

$$E(U_i^2) = \sigma_u^2, \ E(U_i U_j) = 0 \qquad \forall \ i \neq j$$

$$\therefore \text{var}(U) = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{var}(U) = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 I_n$$

حيث ان (I_n) مصفوفة أحادية أو متطابقة (**Unit or Identity Matrix**) وهي ذات مرتبة (**n x n**).

اضافة إلى أعلاه ، يجب أن لا تكون هناك علاقة خطية تامة (تعدد خطي تام) بين المتغيرات المستقلة، كما وان عدد المشاهدات يجب ان يكون أكبر من عدد المعالم المطلوب تقديرها، وهذا يعني أن عدد أعمدة المصفوفة (X) في النموذج (3) أعلاه والبالغ (k+1) يجب أن يقل عن عدد صفوفها البالغ (n) ، بعبارة أخرى أن:

$$\rho(X) = \text{rank}(X) = K + 1 < n$$

حيث ان (X)ρ يمثل رتبة المصفوفة (X).

وتجد الاشارة هنا إلى أن الفرض أعلاه لا يتحقق حينما تكون أحد المتغيرات المستقلة ثابتة (C) مثلا لكافة المشاهدات ، إذ يعني ذلك أن العمود الذي يمثل ذلك المتغير في مصفوفة (X) يساوي العمود الأول مضروبا بالمقدار (C)، سوف نتناول هذه المشكلة بالتفصيل في الفصل الخاص بها من هذا الكتاب.

عند تحقق الفروض أعلاه ، يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى لتقدير معالم النموذج رقم (3) أعلاه ، حيث يمكن أعادة كتابته بالشكل التالي:

$$U = Y - X\beta$$
$$U'U = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$
$$\therefore U'U = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

يلاحظ من الصيغة أعلاه بأن الحد الثاني والثالث ذات قيمة محددة ولا علاقة لها بالمصفوفات، وعليه يمكن جمعها.

$$U'U = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

$$\therefore \frac{\partial U'U}{\partial \beta'} = -2X'Y + 2X'Xb = 0$$

$$\therefore X'Xb = X'Y$$

$$\therefore b_{OLS} = (X'X)^{-1}X'Y \quad \text{.......... (4)}$$

حيث ان $(X'X)$ تعرف بمصفوفة فيشر (Fisher matrix).

التقديرات اعلاه غير متحيزة وتمتلك مصفوفة تباين وتباين مشترك يمكن اشتقاقها كالاتي:

بالرجوع إلى النموذج رقم (3) أعلاه، وكذلك الموجه الخاص بتقدير الصيغة رقم (4) حيث أن:

$$b_{OLS} = (X'X)^{-1} X'Y$$

وبما أن

$$Y = X\beta + U$$

بالتعويض

$$b = (X'X)^{-1} X'(X\beta + U)$$

$$b = \beta + (X'X)^{-1} X'U \quad \text{..........} (5)$$

$$\therefore E(b)_{LS} = \beta$$

وذك لأن

$$E(U) = 0$$

والنتيجة أعلاه تعني بأن (b_{OLS}) ما هو إلا عبارة عن مقدر غير متحيز، وبإعادة كتابة الصيغة رقم (5) نحصل على:

$$b - \beta = (X'X)^{-1} X'U$$

ومنه يمكن كتابة مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجه (b) بالشكل التالي:

$$Var - Cov(b) = Var - Cov\left(\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}\right) = E\left[(b-\beta)(b-\beta)'\right]$$

وبشكل أكثر تفصيلا

$$Var - Cov(b) = E\left(\begin{bmatrix} b_0 - \beta_0 \\ b_1 - \beta_1 \\ \vdots \\ b_k - \beta_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 - \beta_0 & b_1 - \beta_1 & \cdots & b_k - \beta_k \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} E(b_0-\beta_0)^2 & E(b_0-\beta_0)(b_1-\beta_1) & \cdots & E(b_0-\beta_0)(b_k-\beta_k) \\ E(b_1-\beta_1)(b_0-\beta_0) & E(b_1-\beta_1)^2 & \cdots & E(b_1-\beta_1)(b_k-\beta_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(b_k-\beta_k)(b_0-\beta_0) & E(b_k-\beta_k)(b_1-\beta_1) & \cdots & E(b_k-\beta_k)^2 \end{bmatrix}$$

وتعرف المصفوفة أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة ، حيث بموجبها يمكن تحديد مواقع كل من تبـاين المعالم المقدرة والمتمثلة بقطر المصفوفة أما العناصر خارج نطاق القطر فتمثل التباين المشترك بين اي اثنين من هذه المعـالم المقدرة.

أما صيغة احتساب قيم كل من التباين لهذه المعالم والتباين المشترك بينها فيمكن الوصول اليه بعد التعويض بالصيغة أعلاه بما يساويها وكالاتي:

$$\mathbf{Var-Cov(b)=E\left(\left[(X'X)^{-1}X'U\right]\left[(X'X)^{-1}X'U\right]'\right)}$$
$$\mathbf{=E\left[(X'X)^{-1}X'U\ U'X\ (X'X)^{-1}\right]}$$
$$\mathbf{=(X'X)^{-1}X'\ E(UU')X(X'X)^{-1}}$$
$$\mathbf{=\sigma_u^2\ I_n\ (X'X)^{-1}\ X'X\ (X'X)^{-1}}$$
$$\mathbf{=\sigma_u^2\ (X'X)^{-1}} \quad \text{......(6)}$$

يتضح من الصيغة رقم (6) أعلاه ، بأن قيمة تباين أي عنصر من عناصر موجه ($\mathbf{b_{LS}}$) هو عبارة عن حاصل ضرب قيمة $\mathbf{(\sigma_u^2)}$ بما يقابلها من العناصر الواقعة على قطر مصفوفة $\mathbf{(X'X)^{-1}}$، كما ان قيمة التباين المشترك بين أي اثنين من عناصر موجه ($\mathbf{b_{LS}}$) هو عبارة عن حاصل ضرب $\mathbf{(\sigma_u^2)}$ بالعنصر المقابل لهما والواقع خارج نطاق قطر المصفوفة $\mathbf{(X'X)^{-1}}$، علما بأن الصيغة التقديرية لتباين العينة ، أي $\mathbf{E(S_e^2)=\sigma_u^2}$ يمكن الوصول اليهما كالاتي:

$$\mathbf{Y=X\beta+U}$$

النموذج أعلاه يمكن تسميته بالنموذج النظري، حيث يتم التعبير عنه في الجانب التطبيقي (العملي) بالصيغة التالية:

$$\mathbf{Y=Xb+e}$$
$$\mathbf{\therefore e=Y-Xb}$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\mathbf{e=X\beta+U-X(X'X)^{-1}X'Y}$$
$$\mathbf{\therefore e=X\beta+U-X(X'X)^{-1}X'(X\beta+U)}$$
$$\mathbf{e=X\beta+U-X(X'X)^{-1}X'X\beta-X(X'X)^{-1}X'U}$$
$$\mathbf{e=X\beta+U-X\beta-X(X'X)^{-1}X'U}$$
$$\mathbf{e=U-X(X'X)^{-1}X'U}$$
$$\mathbf{=\left[I_n-X(X'X)^{-1}X'\right]U}$$
$$\mathbf{\therefore e=AU}$$

حيث ان

$A=\left[I-X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]$ تعرف بمصفوفة ايـدمبوتنت (Idempotent Matix) ، وهـي مصـفوفة متماثلـة ، اضـافة إلى ذلك تربيع هذه المصفوفة يعطي المصفوفة الاصلية، بعبارة اخرى:

$$A'=A$$
$$A'A=AA=A$$

وبتربيع الاخطاء نحصل على:

$$\begin{aligned}e'e&=\left(A\,U\right)'\left(A\,U\right)\\&=U'A'A\,U\\&=U'A\,U\\&=U'\left[I_n-X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]U\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore E\left(e'e\right)&=E\left(U'\left[I_n-X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]U\right)\\&=E\left(U'U\right)tr\left[I_n-X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]\\&=\sigma_u^2\,I_n\left[tr\left(I_n\right)-tr\left(\left(X'X\right)^{-1}X'X\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore E\left(e'e\right)&=\sigma_u^2\,I_n\left[tr\left(I_n\right)-tr\left(I_{k+1}\right)\right]\\&=\sigma_u^2\left(n-k-1\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\frac{E\left(e'e\right)}{n-k-1}=\sigma_u^2=E\left(S^2\right)$$

الصيغة أعلاه لتقدير تباين العينة ، تعتمد على القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد، علـما انـه في الواقع العملي يفضل استخدام الصيغة التالية دون الرجوع إلى الأخطاء الناتجة من الفرق بين القيمة الحقيقيـة والتقديريـة للمتغير المعتمد، من الصيغة أعلاه لتباين العينة.

$$S_e^2\left(n-k-1\right)=e'e=\left(Y-\hat{Y}\right)'\left(Y-\hat{Y}\right)$$

وبما ان

$$\hat{Y}=X\,b$$

$$\therefore S_e^2\left(n-k-1\right)=\left[Y-X\,b\right]'\left[Y-X\,b\right]$$

$$\begin{aligned}&=Y'Y-Y'Xb-b'X'Y+b'X'Xb\\&=Y'Y-2b'X'Y'+b'X'X\left[\left(X'X\right)^{-1}X'Y\right]\\&=Y'Y-2b'X'Y+b'X'Y\\&=Y'Y-b'X'Y\end{aligned}$$

$$\therefore S_e^2=\frac{Y'Y-b'X'Y}{n-k-1}\qquad(7)$$

حيث ان :

(n) تمثل حجم العينة تحت البحث

(k) تمثل عدد المتغيرات المستقلة

2.3 التقدير حول نقطة المتوسط

من الممكن تسهيل العمليات الحسابية في حالة ايجاد معالم النموذج المدروس وذلك بنقل الحسابات من نقطة الاصل إلى نقطة المتوسطات أي التعامل مع انحرافات كل من المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة عن اوساطها الحسابية ولتوضيح ذلك لنبتدأ بنموذج متضمنا متغيرين مستقلين كالاتي:-

$$\mathbf{Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + U_i}$$
$$\mathbf{\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X}_1 + \beta_2 \overline{X}_2 + \overline{U}}$$

ومنه:

$$\mathbf{Y_i - \overline{Y} = \beta_1 \left(X_{i1} - \overline{X}_1\right) + \beta_2 \left(X_{i2} - \overline{X}_2\right) + U_i - \overline{U}}$$
$$\mathbf{\therefore y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i}$$

حيث ان $\mathbf{\overline{U} = 0}$

وان $(\mathbf{y_i}), (\mathbf{x_{i1}}), (\mathbf{x_{i2}})$: تمثل انحرافات المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة عن اوساطها الحسابية.

بشكل عام ولـ (k) من المتغيرات المستقلة وحجم عينة (n) يمكن اعادة كتابة النموذج أعلاه بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_{11}} & \mathbf{x_{12}} & \cdots & \mathbf{x_{1k}} \\ \mathbf{x_{21}} & \mathbf{x_{22}} & \cdots & \mathbf{x_{2k}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x_{n1}} & \mathbf{x_{n2}} & \cdots & \mathbf{x_{nk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} \\ \mathbf{u_2} \\ \vdots \\ \mathbf{u_n} \end{bmatrix}$$

وبشكل عام :

$$\mathbf{y = x\beta + u}$$

حيث ان:

(y) موجه لانحرافات المتغير المعتمد ذو مرتبة (n x 1) .

(x) مصفوفة لانحرافات المتغيرات المستقلة ذات مرتبة (n x k) .

(•) موجه لمعالم النموذج ويلاحظ ان هذا الموجه قد حذف منه العنصر الأول والمتمثل بالحد الثابت للنموذج الخطي ($\bullet_o$) وعليه يستوجب تقدير هذه المعلمة خارج نطاق النموذج وهو ذو مرتبة (k x 1).

(u) يمثل موجه الاخطاء العشوائية وذو مرتبة (n x 1) علما بأن موجه المعالم (b) يقدر بنفس صيغته السابقة.

وتجدر الاشارة هنا، ان مصفوفة (x) المقاسة بالانحرافات قد اختلفت عن مصفوفة (X) المقاسة بالقيم الاصلية وذلك بتقليصها ، أي حذف الصف الأول والعمود الأول من مصفوفة (X) المقاسة بالقيم الاصلية.

$$b_{LS} = (x'x)^{-1} x'y$$

اخذين بنظر الاعتبار ان كل من مصفوفة (x) وموجه (y) مقاس بالانحرافات، فعلى سبيل المثال لدراسة الحالة التي يكون فيها عدد المتغيرات المستقلة (2) ، عندها الصيغة أعلاه تكتب كالاتي:

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1} x_{i2} \\ \sum x_{i2} x_{i1} & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum x_{i1} y_i \\ \sum x_{i2} y_i \end{bmatrix}$$

أما مصفوفة التباين والتباين المشترك في حالة الانحرافات فيمكن الوصول اليها من النموذج التالي:

$$Y_i = \beta_o + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + U_i$$

$$\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X}_1 + \beta_2 \overline{X}_2 + \dots + \beta_k \overline{X}_k + \overline{U}$$

$$Y_i - \overline{Y} = \beta_1 (X_{i1} - \overline{X}_1) + \beta_2 (X_{i2} - \overline{X}_2) + \dots + \beta_k (X_{ik} - \overline{X}_k) + U_i - \overline{U}$$

$$\therefore y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + U_i - \overline{U}$$

وباستخدام المصفوفات يكون

$$y = x\beta + U - \overline{U}$$

وبما أن:

$$b_{LS} = (x'x)^{-1} x' y$$

$$\therefore b_{LS} = (x'x)^{-1} x' [x\beta + U - \overline{U}]$$

$$b_{LS} = (x'x)^{-1} x' x \beta + (x'x)^{-1} x' U - (x'x)^{-1} x' \overline{U}$$

وبما ان: $\overline{U} = 0$

$$\therefore b - \beta = (x'x)^{-1} x' U$$

$$Var - Cov(b) = E\left[(b-\beta)(b-\beta)'\right]$$

$$\therefore Var - Cov(b)_{LS} = \sigma_u^2 (x'x)^{-1}$$

والصيغة التقديرية لها تكتب بالشكل التالي:

$$Var \hat{-} Cov(b)_{LS} = S_e^2 (x'x)^{-1}$$

علما بأن مصفوفة $(x'x)^{-1}$ المقاسة بالانحرافات لا تتضمن تباين الحد الثابت للنموذج $Var(b_0)$ وكذلك لا تتضمن التباين المشترك للحد الثابت مع أي ميل حدي، بعبارة اخرى لا تتضمن $Cov(b_0, b_j)$ $j = 1,2,...,k,$ وعليه يستوجب ان نشتق صيغة خاصة لهما، وفي أدناه الاشتقاق لذلك قي حالة نموذج متضمن متغيرين فقط ، ويمكن تعميم النتيجة لاكثر من متغيرين مستقلين.

بما ان الحد الثابت لنموذج فيه متغيرين مستقلين يمكن تقديره بالشكل التالي:

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2$$

علما بأن النموذج النظري

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + U_i$$

ومتوسطه

$$\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X}_1 + \beta_2 \overline{X}_2 + \overline{U}$$

$$\therefore \beta_0 = \overline{Y} - \beta_1 \overline{X}_1 - \beta_2 \overline{X}_2 - \overline{U}$$

$$(b_0 - \beta_0) = -b_1 \overline{X}_1 + \beta_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2 + \beta_2 \overline{X}_2 + \overline{U}$$

$$= -\overline{X}_1 (b_1 - \beta_1) - \overline{X}_2 (b_2 - \beta_2) + \overline{U}$$

$$\therefore E(b_0 - \beta_0)^2 = +\overline{X}_1^2 E(b_1 - \beta_1)^2 + 2 \overline{X}_1 \overline{X}_2 E[(b_1 - \beta_1)(b_2 - \beta_2)]$$

$$+ \overline{X}_2^2 E(b_2 - \beta_2)^2 + E(\overline{U})^2$$

$$E(b_0-\beta_0)^2=\overline{X}_1^2\,Var(b_1)+2\,\overline{X}_1\overline{X}_2\,Cov(b_1,b_2)+\overline{X}_2^2\,Var(b_2)+\frac{\sigma_u^2}{n}$$

$$E(b_0-\beta_0)^2=\begin{bmatrix}\overline{X}_1 & \overline{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Var(b_1) & Cov(b_1,b_2)\\ Cov(b_2,b_1) & Var(b_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{X}_1\\ \overline{X}_2\end{bmatrix}+\frac{\sigma_u^2}{n}$$

$$Var(b_0)=E(b_0-\beta_0)^2=\overline{X}'\,\sigma_u^2\,(x'x)^{-1}\,\overline{X}+\frac{\sigma_u^2}{n} \quad \text{.........} (8)$$

يتضح من الصيغة رقم (8) أعلاه بأن المصفوفة $(x'x)^{-1}$ قد احتسبت حول نقطة المتوسط، أي أن جميع المتغيرات المستقلة مقاسة بالانحرافات وليس بالقيم الأصلية، أما موجه $\overline{X}$ فيمثل متوسطات المتغيرات المستقلة ، حيث يمكن اعادة كتابتها بشكل عام كالاتي:

$$E(b_0-\beta_0)^2=Var(b_0)=\sigma_u^2\left[\overline{X}'(x'x)^{-1}\overline{X}+\frac{1}{n}\right]$$

والصيغة التقديرية لها

$$V\hat{a}r(b_0)=S_e^2\left[\overline{X}'(x'x)^{-1}\,\overline{X}+\frac{1}{n}\right]$$

حيث أن $E(S_e^2)=\sigma_u^2$ والذي يمكن تقديره بموجب الصيغة رقم (7) الانفة الذكر ، مع ملاحظة التعامل بإنحرافات المتغيرات.

أما التباين المشترك بين الحد الثابت المقدر (b_0) وأي ميل حدي مقدر لهذا النموذج المتضمن متغيرين مستقلين، فيمكن الوصول اليه بالشكل التالي:

$$Y_i=\beta_0+b_1X_{i1}+\beta_2\,X_{i2}+U_i$$

$$\therefore \beta_0=\overline{Y}-\beta_1\overline{X}_1-\beta_2\,\overline{X}_2+\overline{U}$$

تطبيقيا ان الحد الثابت للنموذج أعلاه، يمكن تقديره بالشكل التالي:

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2$$

وبالطرح نحصل على:

$$\left(b_0 - \beta_0\right) = -b_1 \overline{X}_1 + \beta_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2 + \beta_2 \overline{X}_2 + \overline{U}$$

$$= -\overline{X}_1 \left(b_1 - \beta_1\right) - \overline{X}_2 \left(b_2 - \beta_2\right) + \overline{U} \quad \text{.........} (a)$$

من الصيغة أعلاه يمكن الحصول على التباين المشترك بين الحد الثابت والميل الحدي الأول وبالشكل التالي:

$$\left(b_0 - \beta_0\right) + \overline{X} \left(b_1 - \beta_1\right) = -\overline{X}_2 \left(b_2 - \beta_2\right) + \overline{U}$$

$$\therefore E\left[\left(b_0 - \beta_0\right) + \overline{X}_1 \left(b_1 - \beta_1\right)\right]^2 = E\left[-\overline{X}_2 \left(b_2 - \beta_2\right) + \overline{U}\right]^2$$

$$Var\left(b_0\right) + \overline{X}_1^2\, Var\left(b_1\right) + 2\overline{X}_1\, Cov\left(b_0, b_1\right) = \overline{X}_2^2\, Var\left(b_2\right) + Var\left(\overline{U}\right) - 2\overline{X}_2\, Cov\left(b_2, \overline{U}\right)$$

$$\therefore 2\overline{X}_1 Cov\left(b_0, b_1\right) = -Var\left(b_0\right) - \overline{X}_1^2\, Var\left(b_1\right) + \overline{X}_2^2\, Var\left(b_2\right) + Var\left(\overline{U}\right)$$

وبالتعويض قيمة $Var\ (b_0)$ بما تساويها ، نحصل على

$$2\overline{X}_1\, Cov\left(b_0, b_1\right) = -\overline{X}_1^2\, Var\left(b_1\right) - 2\overline{X}_1 \overline{X}_2\, Cov\left(b_1, b_2\right) - \overline{X}_2^2\, Var\left(b_2\right) - \frac{\sigma_u^2}{n}$$

$$- \overline{X}_1^2\, Vra\left(b_1\right) + \overline{X}_2^2\, Var\left(b_2\right) + \frac{\sigma_u^2}{n}$$

$$\therefore 2\overline{X}_1 Cov\left(b_0, b_1\right) = -2\overline{X}_1^2\, Var\left(b_1\right) - 2\overline{X}_1 \overline{X}_2\, Cov\left(b_1, b_2\right)$$

$$\therefore Cov\left(b_0, b_1\right) = -\overline{X}_1\, Var\left(b_1\right) - \overline{X}_2\, Cov\left(b_1, b_2\right)$$

وبالرجوع إلى الصيغة (a) ، كذلك يمكن الحصول على

$$\left(b_0 - \beta_0\right) + \overline{X}_2 \left(b_2 - \beta_2\right) = -\overline{X}_1 \left(b_1 - \beta_1\right) + \overline{U}$$

وبإتباع نفس الأسلوب أعلاه ، نحصل على التباين المشترك بن الحد الثابت والميل الحدي الثاني، أي:

$$Cov\left(b_0, b_2\right) = -\overline{X}_2\, Var\left(b_2\right) - \overline{X}_1\, Cov\left(b_1, b_2\right)$$

وبوضع النتيجتين أعلاه بشكل مصفوفات ، نحصل على:

$$\begin{bmatrix} Cov\left(b_0, b_1\right) \\ Cov\left(b_0, b_2\right) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Var\left(b_1\right) & Cov\left(b_1, b_2\right) \\ Cov\left(b_2, b_1\right) & Var\left(b_2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} Cov\left(b_0, b_1\right) \\ Cov\left(b_0, b_2\right) \end{bmatrix} = -\sigma_u^2 \begin{bmatrix} \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}\, x_{i2} \\ \sum x_{i2}\, x_{i1} & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix}$$

وبشكل عام ولـ(k) من المتغيرات المستقلة

$$\begin{bmatrix} Cov(b_0,b_1) \\ Cov(b_0,b_2) \\ \vdots \\ Cov(b_0,b_k) \end{bmatrix} = -\sigma_u^2 \begin{bmatrix} \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}\, x_{i2} & \dots & \sum x_{i1}\, x_{ik} \\ \sum x_{i2}\, x_{i1} & \sum x_{i2}^2 & \dots & \sum x_{i2} x_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum x_{ik}\, x_{i1} & \sum x_{ik}\, x_{i2} & \dots & \sum x_{ik}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_k \end{bmatrix}$$

وبشكل أكثر اختصارا

$$Cov(b_0,b_j) = -\sigma_u^2\,(x'x)^{-1}\,\bar{X}$$

حيث ان

$(x'x)$ تمثل مصفوفة المعلومات (Information Matrix) مقاسة حول نقطة المتوسط ، وهي ذات مرتبة (k x k).

$(\bar{X})$ يمثل موجه عمودي لمتوسطات المتغيرات المستقلة وهو ذو مرتبة (k x 1)

والصيغة التقديرية تكتب بالشكل التالي:

$$Cov(b_0,b_j) = -S_e^2\,(x'x)^{-1}\,\bar{X} \;, \qquad j = 1,2,\dots,k$$

2.4 مقدرات الإمكان الأعظم في حالة النموذج الخطي العام

سبق وأن بينا في الفصل الأول وفي معرض تحليل النموذج الخطي البسيط ، بـأن تقـدير الإمكـان الأعظـم يكـافئ تقدير المربعات الصغرى. وكذلك الحال بالنسبة للنموذج الخطـي العـام، فأنـه وفي ظـل الفرضـيات الأساسـية المـارة الـذكر، مقدرات (OLS) تكافئ مقدرات (ML) فكما هو معلوم بأن موجه الأخطاء يتوزع كآلاتي:

$$U \sim N(0, \sigma_u^2\, I_n)$$

وباستخدام أسلوب المصفوفات يمكن إعادة كتابة دالة الكثافة المشتركة بالشكل التالي:

$$MLE = (2\pi\sigma_u^2)^{-\frac{n}{2}}.e^{-\frac{U'U}{2\sigma_u^2}}$$

$$MLE = (2\pi\sigma_u^2)^{-\frac{n}{2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2}(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}$$

$$MLE = (2\pi\sigma_u^2)^{-\frac{n}{2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2}(Y'Y-2\beta'X'Y+\beta'X'X\beta)}$$

وبأخذ اللوغارتيم للطرفين نحصل على:

$$\ln(MLE) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma_u^2 - \frac{1}{2\sigma_u^2}(Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta)$$

$$\therefore \frac{\partial \ln(MLE)}{\partial \beta'} = -\frac{1}{2\sigma_u^2}(-2X'Y + 2X'Xb_{mL}) = 0$$

$$\therefore X'Y = X'Xb_{mL}$$

$$\therefore b_{mL} = (X'X)^{-1}X'Y \quad \text{.......(14)}$$

علما بأن هنا وضعت العلامة (mL) على موجه المعالم المطلوب تقديرها وذلك للاشارة على كونها مقدرات الإمكان الأعظم ، حيث ان من الصيغة (14) يمكن اثبات بأن تقديرات المربعات الصغرى تكافئ تماما تقدير دالة الإمكان الأعظم.

$$b_{mL} = (X'X)^{-1}X'[X\beta + U]$$

$$b_{mL} = \beta + (X'X)^{-1}X'U$$

$$\therefore E(b_{mL}) = \beta$$

أما تباين العينة فيمكن الوصول اليه وكالاتي:

$$\frac{\partial \ln(MLE)}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{n}{2\sigma_u^{*2}} + \frac{1}{2\sigma_u^{*4}}(Y'Y - 2b'_{mL}X'Y + b'_{mL}X'Xb_{mL}) = 0$$

$$\frac{\partial \ln(MEL)}{\partial \sigma_u^2} = -n\sigma_u^{*2} + (Y - Xb_{mL})'(Y - Xb_{mL}) = 0$$

$$\therefore \sigma_u^{*2} = \frac{(Y - Xb_{mL})'(Y - Xb_{mL})}{n}$$

$$\therefore \sigma_u^{*2} = \frac{e'e}{n} \quad \text{.......(15)}$$

يتضح من الصيغة رقم (15) أعلاه ، بأن تقدير الامكان الأعظم لتباين الخطأ متحيزا ، لذا يستوجب تصحيحه وبالشكل التالي:

لدينا

$$b_{mL} = (X'X)^{-1}X'Y$$

وبالتعويض نحصل على

$$e = X\beta + U - X(X'X)^{-1}X'(X\beta + U)$$

$$e = U - X(X'X)^{-1}X'U = \left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]U = AU$$

حيث ان $A = \left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]$ تمثل مصفوفة ايدمبوتنت

$$\therefore e'e = U'A'AU = U'AU$$

$$\therefore e'e = U'\left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]U$$

وبأخذ التوقع لطرفي الصيغة أعلاه نحصل على

$$E(e'e) = E\left[U'\left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]U\right]$$

$$\therefore E(e'e) = E(UU').tr\left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]$$

$$\therefore E(e'e) = \sigma_u^2 I_n\left[tr(I_n) - tr\left[(X'X)^{-1}X'X\right]\right]$$

$$E(ee') = \sigma_u^2\left[n - (k+1)\right]$$

$$\therefore \sigma_u^2 = \frac{E(e'e)}{n-k-1}$$

وعليه فأن الصيغة الغير متحيزة $\left(S_e^2\right)$ لتباين الخطأ $\left(\sigma_u^2\right)$ هي:

$$S_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum e_i^2}{n-k-1}$$

وذلك بعد ضرب الطرفين في مقدار التحيز والمساوي إلى $\left(\frac{n-k-1}{n}\right)$.

2.5 تحليل الانحرافات في النموذج الخطي المتعدد

كما بينا في الجزء (1-7) من الفصل الأول، بأن مجموع مربعات الانحرافات الكلية $\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$ ، تتجزأ إلى جزئين الأول يتمثل بمجموع مربعات الانحرافات الموضحة $\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2$ والثاني يتمثل بمجموع مربعات الانحرافات الغير موضحة (مجموع مربعات البواقي) $\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right)$، أي ان:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \quad \text{.......(16)}$$

وبما ان معامل التحديد (R^2) يعتبر مؤشرا اساسي في تقييم مدى معنوية العلاقة المفترضة بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل، نفس الدور ياخذه هذا المؤشر في حالة النموذج الخطي العام، حيث يطلق عليه تسمية معامل التحديد المتعدد **(Multiple Coefficient of Determination)** ويرمز له بـ $(R_{y \cdot 1,2,\dots,k})$* حيث ان التسلسل **(1,2,…, k)** يشير إلى المتغيرات المستقلة.

وباستخدام المصفوفات للتعبير عن كافة مصادر الانحرافات في النموذج المتعدد، لاحظ الشكل البياني المرقم **(4)**.

$$\mathbf{e'e = (Y - X\,b_{LS})'(Y - X\,b_{LS})}$$

ومنه

$$\mathbf{e'e = Y'Y - 2b'_{LS}\,X'Y + b'_{LS}X'\,Xb_{LS}}$$

$$\mathbf{\therefore e'e = Y'Y - b'_{LS}\,X'Y}$$

وبمقارنة الصيغة رقم **(16)** ، وملاحظة الشكل البياني رقم **(4)** في أدناه، يمكن اعادة كتابة مجموع مربعات الانحرافات الكلية بدلالة المصفوفات بالشكل التالي:

$$\mathbf{Y'Y = b'_{LS}X'\,Y + e'e} \quad \dots\dots\dots\dots \mathbf{(17)}$$

العلاقة رقم **(17)** أعلاه ، توضح المصادر الأساسية لانحرافات مشاهدات موجه المتغير المعتمد **(Y)** ، حيث أن

$\mathbf{(Y'Y)}$ تمثل الانحرافات الكلية **(TSS)**

$\mathbf{(\hat{Y}'\hat{Y}) = b'_{LS}X'Y}$ تمثل الانحرافات الموضحة **(ESS)**

$\mathbf{(e'e)}$ تمثل الانحرافات الغير موضحة **(RSS)**

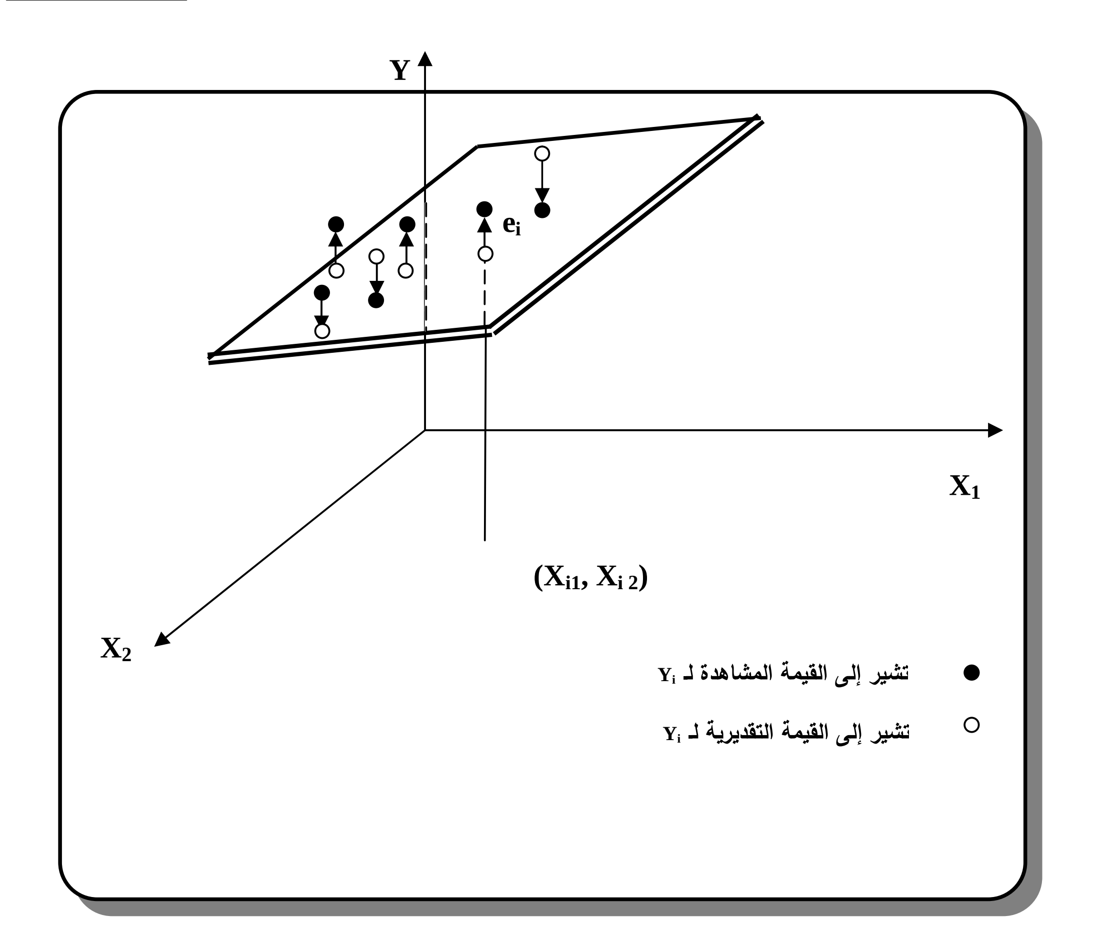
وبما أن

$$\mathbf{R^2 = \frac{ESS}{TSS}}$$

$$\mathbf{\therefore R^2 = \frac{b'_{LS}\,X'Y}{Y'Y} = \frac{b'_{LS}\,x'\,y}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}} \quad \dots\dots\dots\dots \mathbf{(18)}$$

---

* **نشير هنا إلى انه سوف نرمز إلى معامل التحديد المتعدد بـ (R^2) فقط دون الاشارة إلى عدد المتغيرات المستقلة وذلك لاسباب تتعلق بالطبع.**



الشكل رقم (4)

وعليه يمكن تحويل مصادر الانحرافات الثلاثة أعلاه بدلالة معامل التحديد المتعدد وكالاتي:

من الصيغة رقم (18) لدينا

$$\left(Y'Y\right)R^2 = b'_{LS}\ X'Y \qquad (19)$$

أو

$$R^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b'_{LS}\ x'y$$

الصيغة رقم (19) تمثل الانحرافات الموضحة بدلالة معامل التحديد المتعدد، من الصيغة رقم (17) بعد التعويض وإعادة الترتيب نحصل على

$$e'e = Y'Y - Y'Y\,R^2$$

$$\therefore e'e = Y'Y\left(1 - R^2\right) \qquad (20)$$

أو

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \left(1 - R^2\right)\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

الصيغة رقم (20) اعلاه تمثل الانحرافات الغير موضحة بدلالة معامل التحديد المتعدد والتي تكون مع الصيغة رقم (17) و (19) حجر الأساس في بناء جدول تحليل التباين ، الموضح في أدناه ولـ (k) من المتغيرات المستقلة.

جدول تحليل التباين (ANOVA)

متوسط مجموع المربعات M.S.S	درجة الحرية D.f	مجموع المربعات S.S	مصدر الانحرافات S of V
$Y'Y R^2 / k$	k	$b'X'Y = Y'Y R^2$	الانحرافات الموضحة Explained variation $X_1, X_2, \ldots, X_k$
$\left(1 - R^2\right) Y'Y / n - k - 1$	n-k-1	$e'e = \left(1 - R^2\right) Y'Y$	الانحرافات الغير موضحة Unexplained Variation (Residual)
	n-1	$Y'Y$	الانحرافات الكلية Total Variation

حيث ان :

$$F_0 = \frac{R^2 / k}{\left(1 - R^2\right) / n - k - 1}$$

وبالتالي يمكن مقارنة قيمة (F_0) العملية المحتسبة من الجدول أعلاه لدرجة حرية (k) (n-k-1) ولمستوى دلالة معين مع نظيرتها الجدولية فاذا تبين ان قيمة (F_0) العملية أصغر من قيمتها النظرية فذلك يعني بأن العلاقة الخطية المدروسة غير معنوية أي أنه ليس هناك أي تأثير من أي متغير من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_k$ على المتغير المعتمد Y_i . أما إذا كانت قيمة (F_0) العملية أكبر من قيمتها الجدولية فهذا يعني أن العلاقة الخطية المدروسة معنوية وهناك تأثير وعلاقة وثيقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير المعتمد، وفي مثل هذه الحالة نتابع الاختبار لغرض معرفة تأثير كل متغير مستقل في المتغير المعتمد، وذلك للأخذ بالمتغيرات المؤثرة فعلا في العلاقة الخطية المدروسة ، فعلى سبيل المثال ولنموذج خطي متضمن متغيرين مستقلين والموضح بالشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + U_i \quad \text{......(a)}$$

فإذا تبين من الاختبار العام للعلاقة الخطية بأن هناك تأثير معنوي مشترك للمتغيرين المستقلين X_{i2}, X_{i1} علىالمتغير المعتمد (Y_i) ننتقل إلى اختبار مدى تأثير المتغير (X_{i1}) بصورة مستقلة في المتغير المعتمد (Y_i) ويتم ذلك بمعرفة مقدار الزيادة المتحققة في قيمة مجموع مربعات الانحرافات الموضحة من خلال انحدار (Y_i) على (X_{i2}) بعبارة اخرى

$$Y_i = A + \beta_2 X_{i2} + U_{i2} \quad \text{......(b)}$$

والصيغة التقديرية لهذا النموذج

$$\hat{Y}_i = a + b_2 X_{i2} \quad \text{......(c)}$$

حيث يمكن قياس الميل الحدي للنموذج التقديري (c) أعلاه بالشكل التالي:

$$b_2 = \frac{\sum x_{i2} y_i}{\sum x_{i2}^2}$$

ومجموع مربعات الانحرافات الناتجة من النموذج المقدر (c) أعلاه تكون كالاتي:

$$b_2 \sum x_{i2} y_i$$

بينما مجموع مربعات الانحرافات الموضحة والناتجة من النموذج (a) الذي يضم كلا المتغيرين، يعطى بالشكل التالي:

$$Y'Y R^2$$

والفرق بين الاثنين يعطي مدى التأثر الذي يضيفه المتغير المستقل (X_{i1}) في العلاقة الخطية المدروسة ، بعبارة اخرى

$$Y'Y R^2 - b_2 \sum x_{i2} y_i$$

وبالتالي يمكن بناء جدول تحليل التباين مرة اخرى لاختبار مدى معنوية هذا التأثير بالشكل التالي:

جدول تحليل التباين (ANOVA)

S.V	S.S	d.f	M.S.S.	F-Test
الانحرافات الموضحة due to X_{i2}	$b_2 \sum x_{i2} y_i$	$k=1$	$b_2 \sum x_{i2} y_i$	$F_1 = \frac{Y'YR^2 - b_2 \sum x_{i2} y_i}{Y'Y(1-R^2)/(n-k-1)}$
اضافة المتغير (X_{i1}) Addition of X_{i1}	$Y'YR^2 - b_2 \sum x_{i2} y_i$	1	$Y'YR^2 - b_2 \sum x_{i2} y_i$	
الانحرافات الموضحة لـ $X_{i1}...X_{ik}$	$Y'YR^2$	k	$Y'YR^2 / k$	
الانحرافات الغير موضحة	$Y'Y(1-R^2)$	n-k-1	$\frac{Y'Y(1-R^2)}{n-k-1}$	
الانحرافات الكلية	$Y'Y$	n-1		

ثم نقارن قيمة (F_1) العملية مع القيمة النظرية المقابلة لها لدرجة حرية (1) و (n-k-1) ولمستوى دلالة معين، فاذا كانت قيمة (F_1) العملية أكبر من القيمة الجدولية دل ذلك على ان المتغير (X_{i1}) له تأثير معنوي على المتغير المعتمد Y_i ، أما اذا كانت قيمتها أقل فإن ذلك يعني بأن المتغير المستقل (X_{i1}) غير معنوي ويجب ابعاده من العلاقة الخطية المدروسة . وبعد ذلك ننتقل إلى اختبار أثر المتغير المستقل (X_{i2}) في المتغير المعتمد (Y_i) وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة ، فنضع أولا نموذجا يحتوي على المتغير المستقل (X_{i1}) فقط وكالاتي:

$$Y_i = A + \beta_1 X_{i1} + U_{i1} \quad \text{........ (d)}$$

والصيغة التقديرية لهذا النموذج تكون:

$$\hat{Y}_i = a + b_1 X_{i1} \quad \text{........ (e)}$$

حيث يمكن تقدير الميل الحدي

$$b_1 = \frac{\sum x_{i1} y_i}{\sum x_{i1}^2}$$

ومجموع مربعات الانحرافات الناتجة من النموذج (e) أعلاه تعطى بالشكل التالي:

$$b_1 \sum x_{i1} y_i$$

وكما ذكرنا سابقا بأن مجموع مربعات الانحرافات الموضحة للنمـوذج الخطـي المتضـمن كـلا المتغـيرين المسـتقلين تعطـى بالشكل التالي:

$$Y'YR^2$$
$$\therefore Y'YR^2 - b_1 \sum x_{i1} y_i$$

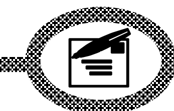
النتيجة أعلاه تبين مدى التأثير الذي يضيفه المتغير المستقل (X_{i2}) في العلاقة الخطية المدروسـة وبالتـالي يمكـن اختبـار مـدى معنوية هذا التأثير باستخدام اختبار (F) وكالاتي:

جدول تحليل التباين (ANOVA)

S.V	S.S	d.f	M.S.S.	F-Test
الانحرافات الموضحة due to X_{i1}	$b_1 \sum x_{i1} y_i$	$k = 1$	$b_1 \sum x_{i1} y_i$	$F_2 = \frac{Y'YR^2 - b_1 \sum x_{i1} y_i}{Y'Y(1-R^2)/(n-k-1)}$ بدرجة حرية (1) و (n-k-1)
اضافة المتغير (X_{i2}) Addition of X_{i2}	$Y'YR^2 - b_1 \sum x_{i1} y_i$	1	$Y'YR^2 - b_1 \sum x_{i1} y_i$	
الانحرافات الموضحة لـ $X_{i1}, X_{i2} \ldots X_{ik}$	$Y'YR^2$	k	$Y'YR^2 / k$	
الانحرافات الغير موضحة Residual	$Y'Y(1-R^2)$	n-k-1	$\frac{Y'Y(1-R^2)}{n-k-1}$	
الانحرافات الكلية Total variation	$Y'Y$	n-1		

وبالتالي نقارن قيمة (F_2) العملية مع القيمة المقابلة لهـا (النظريـة) بدرجـة حريـة (1) و (n-k-1) ومسـتوى معنويـة معين، ومنه يمكن بيان مدى معنوية التأثير الناتج من اضافة المتغير (X_{i2}) للنموذج الخطي المدروس.

وبهذا الاسلوب يمكن متابعة اختبار مدى تأثير اضـافة كـل متغـير مسـتقل عـلى المتغـير المعتمـد وبالتـالي انتقـاء المتغيرات الملائمة للعلاقة المدروسة. ففي حالة وجود تأثير معنوي لكلا المتغيرين على المتغـير المعتمـد يـأخذ بـالنموذج ذو المتغيرين (X_{i1}) ، (X_{i2}). وفي حالة وجود تأثير من متغـير واحـد فقـط فيأخـذ بـذلك النمـوذج الـذي ينطـوي عـلى المتغـير المستقل المؤثر في المتغير المعتمد فعلا، وهذه هي الفكرة الأساسية لمفهوم توفيق المنحنيات (Curve fitting).



مثال تطبيقي (1)

البيانات التالية تمثل متوسط انفاق الفرد العراقي (Y_t) ومتوسط دخله القابل للتصرف (X_{t1}) ، اضافة إلى متوسط انفاقه للسنوات السابقة [1] ($X_{t2} = Y_{t-1}$) خلال الفترة **1964-1980** والبيانات مقاسة بالدينار وبالاسعار الثابتة.

المطلوب:

1- تقدير معالم دالة الاستهلاك التالية:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + U_t$$

ثم بيان أهم المؤشرات اللازمة لاعتماد الصيغة التقديرية لدالة الاستهلاك.

2- اختبار مدى تأثير كل من متوسط دخل الفرد القابل للتصرف ومتوسط انفاقه للسنوات السابقة على متوسط انفاقه الحالي وعلى التوالي، مستخدما مستوى دلالة قدره (5%) .

السنة	Y_t	X_{1t}	X_{2t}
1964	75.3	96.0	72.1 [2]
65	85.0	103.4	75.3
66	87.97	106.4	85.0
67	82.0	105.7	87.97
68	85.9	107.4	82.0
69	81.4	101.8	85.9
1970	81.5	97.3	81.4
71	84.9	95.2	81.5
72	75.9	99.1	84.9
73	57.5	94.2	75.9
74	70.0	121.8	57.5
75	127.5	151.7	70.0
76	139.4	160.8	127.5
77	148.0	162.7	139.4
78	173.6	191.7	148.0
79	174.6	237.95	173.6
1980	185.8	212.4	174.6

[2] **الرقم (72.1) يمثل متوسط انفاق الفرد لعام (1963) وهو رقم تقديري.**

[1] **(Y_{t-1}) يعرف بأنه متغير مرتد زمنيا (متغير ترددي) (legged variable) ، لمزيد من التفاصيل راجع الفصل العاشر من هذه الكتاب.**

الحل :

من الجدول أعلاه ، تم الحصول على العمليات الحسابية التالية:

$$n = 17, \sum Y_t = 1816.27, \qquad \sum X_{t1} = 2245.55$$

$$\sum X_{t2} = 1702.57, \qquad \sum X_{t1}^2 = 330182.7025$$

$$\sum X_{t2}^2 = 192593.0409, \qquad \sum Y_t^2 = 221916.2707$$

$$\sum X_{1t} Y_t = 269159.988, \qquad \sum X_{2t} Y_t = 204717.03$$

$$\sum X_{t1} X_{t2} = 249413.499$$

ومنها يمكن الحصول على الانحرافات مباشرة بالشكل التالي:

$$\sum x_{t1}^2 = \sum X_{t1}^2 - n\overline{X}_1^2 = 33565.36118$$

$$\sum x_{t2}^2 = \sum X_{t2}^2 - n\,\overline{X}_2^2 = 22078.65238$$

$$\sum y_t^2 = \sum Y_t^2 - n\,\overline{Y}^2 = 27867.05249$$

$$\sum x_{t1}\, y_t = \sum X_{t1} Y_t - n\,\overline{X}_1 \overline{Y} = 29246.74691$$

$$\sum x_{t1}\, x_{t2} = \sum X_{t1}\, X_{t2} - n\,\overline{X}_1\, \overline{X}_2 = 24519.02468$$

$$\sum x_{t2}\, y_t = \sum X_{t2}\, Y_t - n\overline{X}_2\, \overline{Y} = 22815.45271$$

$$\therefore \mathbf{b}_{LS} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (x'x)^{-1} x'\, y$$

$$(x'x) = \begin{bmatrix} \sum x_{t1}^2 & \sum x_{t1}\, x_{t2} \\ \sum x_{t2}\, x_{t1} & \sum x_{t2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33565.36118 & 24519.02468 \\ 24519.02468 & 22078.65238 \end{bmatrix}$$



$$x'y = \begin{bmatrix} \sum x_{t1}\, y_t \\ \sum x_{t2}\, y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29246.74691 \\ 22815.45271 \end{bmatrix}$$

$$(x'x)^{-1} = \frac{adj(x'x)}{|x'x|} = \begin{bmatrix} 0.000157822 & -0.000175266 \\ -0.000175266 & 0.000239931 \end{bmatrix}$$

علما بأن

$$|\,x'x\,| = 741077941.5 - 601182571.3 = 139895370.2$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} 0.000157822 & -0.000175266 \\ -0.000175266 & 0.000239931 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29246.74691 \\ 22815.45271 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{LS} = \begin{bmatrix} 0.617007 \\ 0.348174 \end{bmatrix}$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2 = -9.531802$$

اذن الصيغة التقديرية لدالة الاستهلاك:

$$\hat{Y}_t = -9.531 + 0.617\, X_{t1} + 0.348\, X_{t2}$$

لتقييم معالم الصيغة التقديرية أعلاه، يستوجب حساب المؤشرات التالية :

$$S_e^2 = \frac{y'y - b'_{LS}\, x'y}{n-k-1} = \frac{\sum y_t^2 - b_1 \sum x_{t1} y_t - b_2 \sum x_{t2} y_t}{n-k-1}$$

وبالتعويض في العمليات الحسابية أعلاه نحصل على:

$$\therefore S_e^2 = 134.4308664$$

$$\therefore Var\hat{-}Cov(b_{LS}) = Var\hat{-}Cov\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)_{LS} = S_e^2 (x'x)^{-1}$$

$$= 134.4308664 \begin{bmatrix} 0.000157822 & -0.000175266 \\ -0.000175266 & 0.000239931 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Var\hat{-}Cov(b_{LS}) = \begin{bmatrix} 0.021216 & -0.023561 \\ -0.23561 & 0.032254 \end{bmatrix}$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_1) = 0.021216, \quad V\hat{a}r(b_2) = 0.032254\,,\ C\hat{o}v(b_1, b_2) = -0.023561$$

أما تباين الحد الثابت فيقدر بموجب الصيغة التالية:

$$V\hat{a}r(b_0) = S_e^2 \left[\overline{X}' (x'x)^{-1} \overline{X} + \frac{1}{n} \right]$$

حيث أن

$$\overline{X}' = [\overline{X}_1 \quad \overline{X}_2] = [132.091 \quad 100.151]$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_0) = (134.430866)\left([132.091 \quad 100.151] \begin{bmatrix} 0.000157822 & -0.000175266 \\ -0.000175266 & 0.000239931 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 132.091 \\ 100.151 \end{bmatrix} + \frac{1}{17} \right)$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_0) = 78.22053653$$

$$\therefore S.E(b_0) = \sqrt{78.22053653} = 8.844237$$

لاختبار مدى دقة الميل الحدي للاستهلاك أي (b_1) نضع الفرضية :

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

$$\therefore t_0 = \frac{b_1 - \beta_1}{\sqrt{\hat{Var}(b_1)}} = \frac{0.617}{\sqrt{0.0212}} = 4.2376$$

وبمقارنة قيمة (t_0) العملية مع نظيرتها الجدولية لدرجة حرية مساوية (n-k-1) ومستوى دلالة (5%) والمساوية إلى

$$t\left(n-k-1, \frac{\lambda}{2}\right) = t(14,\ 0.025) = 2.145$$

$$\therefore 4.2376 > 2.145$$

ونتيجة المقارنة أعلاه تدعوا إلى الاخذ بالفرض البديل (H_1) والتي تعني ان متوسط الدخل الفردي يمارس تأثيرا في متوسط انفاق الفرد. أما فيما يتعلق باختبار مدى معنوية وتأثير نمط انفاق الفرد السابق على متوسط انفاقه الحالي، نضع الفرضية التالية:

$$H_0 : \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

$$\therefore t_0 = \frac{b_2 - \beta_2}{\sqrt{\hat{Var}(b_2)}} = \frac{0.348}{\sqrt{0.0323}} = 1.93656$$

$$\therefore -t\left(n-k-1, \frac{\lambda}{2}\right) < t_0 < \left(n-k-1, \frac{\lambda}{2}\right)$$

أي ان

$$-2.145 < 1.93656 < 2.145$$

أي تقبل فرضية العدم (H_0) ، بعبارة أخرى ، نمط إنفاق الفرد السابق لا يمارس أي تأثير على اتفاقه الحالي.

ولاختبار مدى معنوية العلاقة الخطية المفترضة لتقدير معالم دالة الاستهلاك، وبيان اثر كل من (X_{t1}) و (X_{t2}) على متوسط إنفاق الفرد بشكل انفرادي ، نستخدم اختبار (F) والذي بدوره يتطلب حساب المؤشرات التالية:

$$y'y = \sum y_t^2 = 27867.05249$$

$$\therefore R^2 = \frac{b'X'Y}{Y'Y} = \frac{\begin{bmatrix}0.617 & 0.348\end{bmatrix}\begin{bmatrix}29246.74691 \\ 22815.45271\end{bmatrix}}{27867.05249}$$

$$\therefore R^2 = 0.93246$$

$$b'_{LS}X'Y = R^2 \sum y_t^2 = 25985.02036$$

$$e'e = \sum e_t^2 = \left(1 - R^2\right)\sum y_t^2 = 1882.032127$$

جدول التباين (ANOVA)

S.V	S.S	d.f	M.S.S.	F-Test
الانحرافات الموضحة X_{t1},X_{t2}	25985.02036	2	12992.51018	$F_0 = 96.648$
الانحرافات الغير موضحة Residual	1882.032127	14	134.4308662	$F_0 = \frac{R^2/k}{\left(1-R^2\right)/\left(n-k-1\right)}$
المجموع الكلي	27867.05248	16		=96.648

وبمقارنة قيمة (F_0) العملية مع نظيرتها الجدولية لدرجة حرية (k) و (n-k-1) ومستوى دلالة (5%).

$$F\left(k, n-k-1, 1-\lambda\right) = F\,(2,14,\ 0.95) = 3.74$$
$$\therefore 96.648 > 3.74$$

ونتيجة الاختبار أعلاه نوضح قبول الفرضية البديلة التالية:

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$$

أي أن العلاقة الخطية المفترضة لتقدير معالم دالة الاستهلاك معنوية وإن هناك على الاقل تأثير من أحد المتغيرين (X_{t1}) ، (X_{t2}) على المتغير المعتمد (Y_t). ولغرض الوقوف على تأثير كل من متوسط الدخل الفردي القابل للتصرف ومتوسط انفاق الفرد للسنوات السابقة في متوسط انفاق الفرد الحالي، نتابع الاختيار فنضع نموذجا يتضمن متوسط انفاق الفرد السابق (X_{t2}).

$$Y_t = a + b_2 X_{t2}$$

حيث ان

$$b_2 = \frac{\sum x_{t2} y_t}{\sum x_{t2}^2} = \frac{22815.45271}{22078.65238} = 1.0333716$$

ومنه تحسب الانحرافات الموضحة بالشكل التالي:

$$b_2 \sum x_{t2} y_t = 23576.84126$$

وبالتالي يمكن حساب التأثير الذي يضيفه المتغير (X_{t1}) (متوسط دخل الفرد).

$$R^2 \sum y_t^2 - b_2 \sum x_{t2} y_t = 2408.1791$$

أما اختبار مدى معنوية التأثير الذي يضيفه المتغير المستقل (X_{t1}) في العلاقة الخطية المدروسة فيمكن بيانه من خلال جدول تحليل التباين التالي:

جدول تحليل التباين (ANOVA)

S.V	S.S	d.f	M.S.S.	F-Test
الانحرافات الموضحة للمتغير X_{t2}	23576.84126	1	23576.84126	$F_1 = \frac{R^2 \sum y_t^2 - b_2 \sum x_{t2} y_t}{(1-R^2)\sum y_t^2 / (n-k-1)}$ $\therefore F_1 = 17.194$
تأثير اضافة المتغير X_{t1}	2408.1791	1	2408.1791	
الانحرافات الموضحة لـ X_{t1}, X_{t2}	25985.02036	2	12992.51018	
الانحرافات الغير موضحة Residual	1882.032127	14	134.4308662	
الانحرافات الكلية Total variation	27867.05248	16		

وبمقارنة قيمة (F_1) العملية مع نظيرتها الجدولية لدرجة حرية (k) و (n-k-1) ومستوى دلالة (5%).

$$F(k,\ n-k-1,\ 1-\lambda)=F(1,14,0.95)=4.60$$

$$\therefore 17.914>4.60$$

يتضح بأن المتغير المستقل (X_{t1}) ، أي متوسط دخل الفرد له تـأثير معنـوي عـلى متوسـط انفـاق الفـرد. أمـا فـيما يتعلق بمدى معنوية المتغير المستقل (X_{t2}) أي متوسط انفاق الفرد للسنوات السابقة في تقدير دالة الاستهلاك، في مثل هـذه الحالة يجب وضع نموذجا يتضمن متوسط دخل الفرد القابل للتصرف (X_{t1}) وكالاتي:

$$\hat{Y}_t = a + b_1 X_{t1}$$

حيث ان

$$b_{1} = \frac{\sum x_{t1} y_t}{\sum x_{t1}^2} = \frac{29246.74691}{33565.36118} = 0.871337172$$

والانحرافات الموضحة لهذا النموذج البسيط

$$b_1 \sum x_{t1} y_t = 25488.77965$$

أما التأثير الذي يضيفه المتغير (X_{t2}) (متوسط انفاق الفرد للسنوات السابقة)

$$R^2 \sum y_t^2 - b_1 \sum x_{t1} y_t = 501.24262$$

ولاختيار مدى معنوية هذا التأثير المضاف من قبل المتغير المستقل (X_{t2}) نضع جدول تحليل التباين التالي:

جدول تحليل التباين (ANOVA)

S.V	S.S	d.f	M.S.S.	F-Test
الانحرافات الموضحة للمتغير X_{1t}	25483.77965	1	24583.77965	$F_2 = \frac{R^2 \sum y_t^2 - b_1 \sum x_{t1} y_t}{(1-R^2)\sum y_t^2 / (n-k-1)}$ $\therefore F_2 = 3.729$
تأثير اضافة المتغير X_{t2}	501.24262	1	501.24262	
الانحرافات الموضحة لـ X_{t1}, X_{t2}	25985.02036	2	12992.51018	
الانحرافات الغير موضحة Residual	1882.032127	14	134.4308662	
الانحرافات الكلية Total variation	27867.05248	16		

وبمقارنة قيمة (F_2) العملية مع القيمة الجدولية لدرجة حرية (k) و (n-k-1) ومستوى دلالة (5%).

$$F(k, n-k-1, 1-\lambda) = F(1,14,0.95) = 4.60$$
$$\therefore 3.7129 < 4.60$$

يتضح من نتيجة الاختبار أعلاه، أن تأثير المتغير (X_{t2}) على نمط انفاق الفرد ضئيل جدا على الرغم من ان الميل الحدي لهذا المتغير يحمل اشارة موجبة ، أي ان الاستهلاك يتغير طرديا بتغير هذا المؤشر ، اضافة إلى الميل الحدي للاستهلاك قد انخفض واصبح أكثر اتفاقا وواقع نمط انفاق المستهلك في العراق عندما تضمنته صيغة دالة الاستهلاك المقدرة، قارن ذلك مع الصيغة المقدرة لدالة الاستهلاك في الفصل الاول من هذا الكتاب.

2.6 استدلال في تحليل الانحدار العام

سبق وان بينا في الفصل الاول بان تقديرات المربعات الصغرى (OLS) في ظل الفرضيات الاساسية تتمتع بخاصية أفضل تقدير خطي غير متحيز، مثل هذه الخاصية يمكن اثباتها في حالة النموذج الخطي العام.

كما هو معلوم تقديرات (OLS) لمعالم النموذج الخطي العام ، تعطى وفق الصيغة التالية:

$$b_{LS} = (X'X)^{-1} X'Y$$

من ملاحظة الصيغة التقديرية أعلاه ، يتضح ان موجه المعالم المقدرة (b_{LS}) ما هو إلا عبارة عن دالة خطية في موجه مشاهدات المتغير المعتمد (Y) ، أما خاصية عدم التحيز فهي متحققة وذلك لان

$$b_{LS} = \beta + (X'X)^{-1} X'U$$

$$\therefore E(b_{LS}) = \beta$$

وأخيرا خاصية أقل تباين ، حيث أن موجه المعالم المقدرة يمتلك مصفوفة تباين وتباين مشترك ، بعد تطبيق أسلوب (OLS) كالاتي:

$$Var - Cov(b_{LS}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

من أعلاه يتضح أن موجه المعالم المقدرة ما هو إلا عبارة عن تشكيلية خطية لمشاهدات المتغير المعتمد وهو تقدير غير متحيز وبنفس الوقت يمتلك مصفوفة تباين وتباين مشترك كما معطاة في الصيغة أعلاه ، عليه فإن:

$$U \sim N\left(0,\ \sigma_u^2 I_n\right)$$

$$Y \sim N\left(X\beta\ ,\ \sigma_u^2 I_n\right)$$

الان وفي ظل الفروض أعلاه ، يمكن اثبات بأن موجه معالم النموذج الخطي العام المقـدر بطريقـة (OLS)، يمتلـك خاصية أفضل تقدير خطي غير متحيز (BLUE) ، ويتم ذلك من خلال تطبيق نظرية كرامير-راو ذات الحدود الدنيا وكالاتي:

لدينا من الجزء (4-2) ، حيث يمكن كتابة دالة الكثافة المشتركة للامكان الاعظم في حالة (GLM)

$$f\left(Y_i\right)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_u^2}\right)^{n/2}.e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2}(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}$$

أو

$$L\left(\beta,\sigma_u^2,Y_i\right)=\left(2\pi\sigma_u^2\right)^{-\frac{n}{2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2}(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}$$

حيث ان (L) تشير إلى دالة الامكان الاعظم ، $i=1, 2, \ldots, n$

وبأخذ اللوغارتيم للطرفين نحصل على

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma_u^2\right)-\frac{1}{2\sigma_u^2}\left(Y-X\beta\right)'\left(Y-X\beta\right)$$

علما بأن صيغة كرامير – راو ذو الحدود الدنيا ، تعطى في حالة النموذج الخطي العام بالشكل التالي:

$$C.R.L.b=\frac{1}{\begin{bmatrix}-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\,\partial\beta'}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\,\partial\sigma_u^2}\right)\\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma_u^2\,\partial\beta}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2\,\sigma_u^2}\right)\end{bmatrix}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

حيث ان:

(ln L) تعني اللوغارتيم لدالة الامكان الاعظم

(•) موجه متضمنا (k+1) من المعالم وأن j=0,1,…, k

وبأخذ التفاضل الجزئي الأول والثاني بالنسبة لموجه (•) نحصل على:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma_u^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}\left(Y'Y - 2Y'X\beta + \beta'X'X\beta\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma_u^2}\left(X'Y - X'X\beta\right) = \frac{1}{\sigma_u^2} X'\left(Y - X\beta\right)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta\ \partial \beta'} = \frac{1}{\sigma_u^2}\left(-X'X\right) = -\frac{1}{\sigma_u^2}(X'X) \quad \text{.......... (22)}$$

في حين بالنسبة لـ σ_u^2.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{n}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\sigma^u}\left(Y - X\beta\right)'(Y - X\beta)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \sigma_u^2} = \frac{n}{2\sigma_u^4} - \frac{1}{\sigma_u^6}\left(Y - X\beta\right)'\left(Y - X\beta\right) \quad \text{.......... (23)}$$

كذلك

$$\therefore \frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \sigma_u^2\, \partial \beta} = -\frac{1}{\sigma_u^4} X'\left(Y - X\beta\right) \quad \text{.......... (24)}$$

والنتيجة أعلاه مطابقة تماما إلى :

$$\therefore \frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \sigma_u^2\, \partial \beta} = \frac{1}{2\sigma_u^2}\left(Y - X\beta\right)'\left(Y - X\beta\right)$$

$$= \frac{-2}{2\sigma_u^4}\left(X'Y - X'X\beta\right) = -\frac{1}{\sigma_u^4} X'\left(Y - X\beta\right) \quad \text{.......... (25)}$$

وبتعويض نتائج التفاضل الجزئي الثنائي المرقمة (22) ، (23) ، (24) و (25) في الصيغة المرقمة (21) نحصل على

$$C.R.L.b = \frac{1}{\begin{bmatrix} -E\left[-\frac{1}{\sigma_u^2}(X'X)\right] & -E\left[-\frac{1}{\sigma_u^4} X'(Y - X\beta)\right] \\ -E\left[-\frac{1}{\sigma_u^4} X'(Y - X\beta)\right] & -E\left[\frac{n}{2\sigma_u^4} - \frac{1}{\sigma_u^6}(Y - X\beta)'(Y - X\beta)\right] \end{bmatrix}}$$

من المصفوفة المجزأة أعلاه، يتضح بأن العناصر خارج نطاق القطر مساوية إلى الصفر في حين العنصر الاول على قطرها يمثل مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعالم النموذج الخطي المقدرة . أما العنصر الثاني على القطر فإنه يمثل تباين العينة حيث يمكن إعادة كتابته كالاتي:

$$-\left[\frac{n}{2\sigma_u^4}-\frac{E(U'U)}{\sigma_u^6}\right]=-\left[\frac{n}{2\sigma_u^6}-\frac{n\sigma_u^2}{\sigma_u^6}\right]=\frac{n}{2\,\sigma_u^4}$$

عليه فإن صيغة كرامير – راو ذو الحدود الدنيا ، يمكن وضعها كالاتي:

$$C.R.L.b=\frac{1}{\begin{bmatrix}\frac{(X'X)}{\sigma_u^2} & 0\\ 0 & \frac{n}{2\sigma_u^4}\end{bmatrix}}=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_u^2}\begin{bmatrix}(X'X) & 0\\ 0 & \frac{n}{2\sigma_u^2}\end{bmatrix}}$$

وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$C.R.L.b=\sigma_u^2\begin{bmatrix}(X'X) & 0\\ 0 & \frac{n}{2\sigma_u^2}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\sigma_u^2(X'X)^{-1} & 0\\ 0 & \frac{2\sigma_u^4}{n}\end{bmatrix}$$

وبمقارنة مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجه المعالم المقدر بموجب اسلوب (OLS) مع مصفوفة التباين والتباين المشترك الحاصل عليها وفق صيغة كرامير – راو ، نجد أن المصفوفتين متطابقتين ومساوية إلى ،

$$Var-cov(b)=\sigma_u^2\,(X'X)^{-1}$$

ومنه يتضح بأن تقديرات (OLS) لمعالم النموذج الخطي العام تتصف بخاصية أفضل تقدير خطي غير متحيز (BLUE) ، في حين الحدود الدنيا لهذه النظرية لا تتحقق بالنسبة لتباين العينة (S_e^2) وذلك لان:

$$\frac{2\sigma_u^4}{n}<\frac{2\sigma_u^4}{(n-k-1)} \quad \text{.......... (26)}$$

مثل هذه النتيجة يمكن تدقيقها والتحقق منها من خلال خاصية الكفاءة الاحصائية (Sufficient Statistics) حيث يمكن بيان ان المقدر (S_e^2) غير متحيز وكفوء وبنفس الوقت يتصف بخاصية أقل تباين ممكن . في الصفحات القادمة من هذا الفصل سوف نتطرق وبشكل مفصل إلى ذلك.

أما خاصية الاتساق (Consistency) لمقدرات (OLS) في حالة النموذج الخطي العام التالي:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U} \sim \mathbf{N}\left(\mathbf{0}, \sigma_u^2\, \mathbf{I}_n\right) \quad , \quad \mathbf{E}\left(\mathbf{U}_i\, \mathbf{U}_j\right) = \mathbf{0} \qquad \forall\ i \neq j$$

فإن المقدر (b_{LS}) يكون متسقا لـ (•) في حالة تحقق الشرطين التاليين.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(b_{LS}\right) = \beta$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} Var\left(b_{LS}\right) = 0$

بالنسبة للشرط الأول:

$$E\left(b_{LS}\right) = E\left[\left(X'X\right)^{-1} X'\, Y\right]$$

$$= E\left[\left(X'X\right)^{-1} X'\left(X\beta + U\right)\right]$$

$$= E\left[\beta + \left(X'X\right)^{-1} X'\, U\right]$$

$$E\left(b_{LS}\right) = \beta \quad , \quad E\left(U\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(b_{LS}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(\beta\right) = \beta$$

أما الشرط الثاني

$$\lim_{n\to\infty} Var - cov\left(b_{LS}\right) = \lim_{n\to\infty} \sigma_u^2 \left(X'X\right)^{-1}$$

$$= \sigma_u^2 \lim_{n\to\infty} \left(X'X\right)^{-1}$$

$$= \sigma_u^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{Adj(X'X)}{\left|X'X\right|}\right)$$

وبإتباع نفس اسلوب التحليل الوارد في 1.4يمكن الاثبات بإن

$$\lim_{n\to\infty} E\left(b_{LS}\right) = \beta \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} Var\left(b_{LS}\right) = 0$$

وبتحقيق الشرطين أعلاه، يكون المقدر (b_{LS}) متسقا ، أي أن مقدرات (OLS) لمعالم النموذج الخطي العام متسقة.

إضافة إلى خاصية الـ (BLUE) والاتساق ، يمكن بيان بأن مقدرات (OLS) لمعالم النموذج الخطي العام كفوءة (Efficient) ، وذلك من خلال تحقق شرط الكفاءة التالي:

$$\text{eff}\left(b_j\right)=\frac{\text{Var}\left(b_j\right)\text{ in C.R.L.b}}{\text{Var}\left(b_j\right)\text{ in OLS}}\le 1$$

حيث أن

$$j=0,1,2,...,k$$

وبما أن

$$\text{Var}\left(b\right)\text{in C.R.L.b}=\sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1}$$

وكذلك

$$\text{Var}\left(b\right)\text{in OLS}=\sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1}$$

$$\therefore \text{eff}\left(b\right)=\sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1}\sigma_u^{-2}\left(X'X\right)=I_{k+1}$$

حيث أن

(b) موجه المعالم المقدرة ذات بعد (k+1 x 1)

النتيجة أعلاه تبين بأن مقدرات (OLS) لمعالم النموذج الخطي العام كفوءة.

بالرجوع إلى الصيغة رقم (26) والخاصة بتباين العينة $\left(S_e^2\right)$ ، وكما ذكرنا سابقا ، أن هذا المقدر غير متحيز ، حيث يمكن إثبات ذلك كالاتي:

لدينا

$$E\left(S_e^2\right)=\frac{1}{n-k-1}E\left(e'e\right)$$

وبالتعويض

$$E\left(S_e^2\right)=\frac{1}{n-k-1}E\left[\left(Y-Xb\right)'\left(Y-Xb\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n-k-1}E\left(Y'Y-b'X'Y\right)$$

وبالتعويض عن موجه (b) نحصل على

$$E\left(S_e^2\right)=\frac{1}{n-k-1}E\left\{Y'\left[I_n-X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]Y\right\}$$

$$\therefore E\left(S_e^2\right)=\frac{1}{n-k-1}E\left(Y'AY\right)$$

حيث أن

$$A = \left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]$$

عليه فإن المقدر $\left(S_e^2\right)$ يكون غير متحيز في حالة تحقق القاعدة التالية

$$E\left(S_e^2\right) = \frac{1}{n-k-1}E\left(Y'AY\right) = \frac{tr(VA)}{n-k-1} + \frac{(u'Au)}{n-k-1}$$

حيث أن

$$V = Van - cov(Y) = \sigma_u^2 I_n$$

$$u = E(Y) = X\beta$$

وبما أن الحد الأخير من القاعدة أعلاه مساويا إلى الصفر وذلك لأن

$$u'Au = (X\beta)'\left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]X\beta$$

$$= \beta'X'X\beta - \beta'X'X\beta = 0$$

$$\therefore E\left(S_e^2\right) = \frac{1}{n-k-1}tr(VA)$$

$$= \frac{1}{n-k-1}\sigma_u^2 I_n\, tr(A)$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{n-k-1}tr\left[I_n - X(X'X)^{-1}X'\right]$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{n-k-1}\left[tr(I_n) - tr(I_{k+1})\right]$$

$$\therefore E\left(S_e^2\right) = \frac{\sigma_u^2}{n-k-1}(n-k-1) = \sigma_u^2$$

النتيجة أعلاه تبين ان تباين العينة $\left(S_e^2\right)$، ما هو إلا عبارة عن مقدر غير متحيز لتباين المجتمع $\left(\sigma_u^2\right)$.

أما خاصية الاتساق للمقدر $\left(S_e^2\right)$ ، يمكن اثباتها من خلال تحقق الشرطين التاليين:

1- $\lim_{n\to\infty} E\left(S_e^2\right) = \sigma_u^2$

2- $\lim_{n\to\infty} Var\left(S_e^2\right) = 0$

وكما بينا في أعلاه ، الشرط الأول لخاصية الاتساق متحقق وذلك لان:

$$E\left(S_e^2\right) = \sigma_u^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} E\left(S_e^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sigma_u^2\right) = \sigma_u^2$$

أما الشرط الثاني فيمكن اثباته من خلال القاعدة التالية:

$$Var\left(Y'AY\right) = 2\,tr\left(AV\right)^2 + 4U'AVAU$$

حيث أن

$$Y \sim N\left(U, V\right)$$

$$U = X\beta\ ,\quad V = \sigma_u^2 I_n \quad ,\ A = \left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]$$

$$\therefore Var\left(Y'AY\right) = 2\,tr\left(A\sigma_u^2 I_n\right)^2 + 4U'A\sigma_u^2 I_n AU$$

وبما أن الحد الاخير من الصيغة أعلاه مساويا إلى الصفر. أي أن

$$4\sigma_u^2 \beta'X'AAX\beta = 4\sigma_u^2 \beta'X'AX\beta = zero$$

$$= 4\sigma_u^2 \beta'X'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]X\beta = zero$$

$$= 4\sigma_u^2 \left[\beta'X'X\beta - \beta'X'X\beta\right] = zero$$

عليه فإن

$$Var\left(Y'AY\right) = 2\,tr\left(\sigma_u^2 A\right)^2$$

$$= 2\sigma_u^4\, tr\left(A\right)$$

$$= 2\sigma_u^4\, tr\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]$$

$$= 2\sigma_u^4\left[tr\left(I_n\right) - tr\left(I_{k+1}\right)\right]$$

$$= 2\sigma_u^4\left(n - k - 1\right)$$

وبالتالي فإن:

$$Var\left(S_e^2\right) = Var\left(\frac{Y'AY}{n-k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(n-k-1\right)^2}\, Var\left(Y'AY\right)$$

بالتعويض

$$\therefore \mathbf{Var}\left(\mathbf{S}_{\mathbf{e}}^{2}\right)=\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{n}-\mathbf{k}-\mathbf{1})^{2}}.2\sigma_{\mathbf{u}}^{4}(\mathbf{n}-\mathbf{k}-\mathbf{1})$$

$$=\frac{2\sigma_{\mathbf{u}}^{4}}{\mathbf{n}-\mathbf{k}-\mathbf{1}}$$

ومنه يتبين أن الشرط الثاني لخاصية الاتساق قد تحقق وذلك لان :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{Var}\left(\mathbf{S}_{\mathbf{e}}^{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\sigma_{\mathbf{u}}^{4}}{\mathbf{n}-\mathbf{k}-\mathbf{1}}\right)=\mathbf{zero}$$

وبتحقق الشرطين أعلاه ، يمكن القول بأن تباين العينة المقدر $\left(\mathbf{S}_{\mathbf{e}}^{2}\right)$ يملك خاصية الاتساق ، عبارة أخرى المقدر $\left(\mathbf{S}_{\mathbf{e}}^{2}\right)$ متسق لتباين المجتمع.

2-7 التنبؤات

يتضح مما سبق بأن الظواهر المدروسة قد تكون ظواهر سلوكية وبالتالي يمكن تمثيلها بدوال سلوكية (Behaviour function) ، وفي هذا النوع من الظواهر يمكن السيطرة على معظم المتغيرات التي تؤثر أو تحدد تلك الظواهر ، عليه فإن تقدير وتحليل معالم هذه الظواهر يمكن أن يتم من خلال بناء نماذج إنحدار بسيطة (SLM) أو عامة (GLM) وفيها يلعب الخطأ العشوائي دورا أساسيا في تحديد طبيعة النموذج وتشخيص متغيراته.

يعتبر التنبؤ من الطرق العلمية المهمة المستخدمة في عمليات التخطيط والرقابة ومجالات اتخاذ القرارات ، ويقصد بالتنبؤ تقدير المجهول وخاصة فيما يتعلق بالحوادث المستقبلية حيث يتم التعرف على مسار الظاهرة محل البحث في المستقبل، ويمكن تعريف التنبؤ بأنه محاولة عقلانية لتقدير المتغيرات المستقبلية المحتملة من خلال معرفة المتغيرات السلوكية وغير السلوكية لتلك الظاهرة.

هنالك أساليب متعددة لاجراء التنبؤات منها ما يعرف باسلوب التنبؤات المشابرة ويستند هذا النوع من التنبؤ على الفرضية القائلة بأن المستقبل هو امتداد للحاضر والأخير هذا بدوره امتداد للماضي وبذلك فإن هذا الأسلوب في التنبؤ يعتمد على فكرة حصول تغير ثابت بين الفترة الحالية والفترة المستقبلية .

أما الأسلوب الثاني من أساليب التنبؤ فيعرف بالتنبؤات الاتجاهية حيث يمثل المتغير المراد التنبؤ له دالة في الزمن ، مثل دالة الاتجاه الخطي أو الأسي ...الخ.

بشكل عام يمكن النظر إلى التنبؤ باستخدام الانحدار من زاويتين:

<u>الأولى : تحليل الانحدار باعتماد الزمن كمتغير مستقل.</u>

ويستخدم أسلوب المربعات الصغرى الاعتيادية **Ordinary least squares (OLS)** في تحليل الظاهرة ، حيث يتم قياس الزمن بسلسلة إعداد طبيعية ويقدر الاتجاه العام للظاهرة على إعتبارها دالة في الزمن ، أي أن

$$\mathbf{Y_i = f(T_i)}$$

حيث أن

Y_i : تمثل قيمة الظاهرة.

T_i : تمثل الزمن مقاسا بسلسلة أعداد طبيعية.

$i = 1, 2, \dots, n$ يمثل حجم العينة

ولتقدير الاتجاه العام للظاهرة، تمثل الدالة أعلاه بصيغة خطية وكالاتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 T_i + U_i \quad \text{.........} (27)$$

حيث أن

$\beta_0 \;,\; \beta_1$: تمثل معالم الصيغة الخطية.

U_i : تمثل الخطأ العشوائي

وفي ظل فرضية تجانس تباين الخطأ (U_i) الخاضع للتوزيع الطبيعي ، أي أن

$$U_i \sim N(0, \sigma_u^2)$$

$$E(U_i U_j) = 0 \quad \forall \quad i \neq j$$

يمكن تقدير معالم الصيغة أعلاه، وذلك من خلال تطبيق اسلوب المربعات الصغرى الاعتيادية(OLS) ، أي أن

$$\frac{\partial \sum U_i^2}{\partial \beta_0} = 0 \;, \qquad \frac{\partial \sum U_i^2}{\partial \beta_1} = 0$$

وبحل المعادلتين الناتجتين من التفاضل الجزئي أعلاه ، حلا آنيا نحصل على تقدير للميل الحدي والحد الثابت كالاتي:

$$b_1 = \frac{n \sum T_i Y_i - \left(\sum T_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{n \sum T_i^2 - \left(\sum T_i\right)^2} \quad \text{.........} (28)$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{T} \quad \text{.........} (29)$$

وبتباين للميل الحدي

$$Var(b_1) = \frac{\sigma_u^2}{\sum t_i^2} \quad \text{.........} (30)$$

وللحد الثابت

$$Var(b_0) = \sigma_u^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{T}^2}{\sum t_i^2} \right) \quad \text{.......(31)}$$

أما تباين العينة (S_e^2) ، فيقدر وفق الصيغة التالية:

$$E(S_e^2) = \sigma_u^2 = \frac{\sum y_i^2 - b_1^2 \sum t_i^2}{n-k-1} = \frac{\sum y_i^2 - b_1 \sum t_i y_i}{n-k-1} \quad \text{.......(32)}$$

حيث أن

$$\sum t_i^2 = \sum (T_i - \overline{T})^2$$

$$\sum y_i^2 = \sum (Y_i - \overline{Y})^2$$

وأن (n) تمثل حجم العينة و (k) تمثل عدد المتغيرات المستقلة

ولاختبار مدى معنوية العلاقة الخطية المفترضة لتقدير معالم الصيغة ، لا بد من حساب معامل التحديد (R^2) وكالاتي:

$$R^2 = \frac{b_1^2 \sum t_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{b_1 \sum t_i y_i}{\sum y_i^2} \quad \text{.......(33)}$$

وبالتالي يمكن احتساب فترة الثقة لاي نقطة من نقاط المتغير المعتمد ، ولنفرض بأن النقطة المطلوب تقدير حدود ثقة لها هي (Y_0) وبما أن $(\hat{Y}_0)$ هي القيمة التقديرية لـ (Y_0) ، إذن لابد من اعتماد $(\hat{Y}_0)$ في تقدير فترة الثقة للقيمة

$$E(Y_0) = \beta_0 + \beta_1 T_0$$

وهذا بدوره يتطلب احتساب تباين القيمة $(\hat{Y}_0)$ وكالاتي

$$Var(\hat{Y}_0) = \sigma_u^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(T_0 - \overline{T})^2}{\sum t_i^2} \right) \quad \text{.......(34)}$$

وبما أن قيمة $(\hat{Y}_0)$ ما هي إلا عبارة عن تشكيلة خطية من مشاهدات المتغير العشوائي والمستقلة الواحدة عن الأخرى ، عليه فإن حدود الثقة للقيمة $E(Y_0)$ تحسب كالاتي:

$$E\left(Y_0\right)=\hat{Y}_0 \pm\left(t_{n-k-1}\ ,\ \frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{Var\left(\hat{Y}_0\right)} \quad \text{.....(35)}$$

حيث أن

(λ) تمثل مستوى المعنوية

يطلق على فترة الثقة أعلاه لقيمة المتغير المعتمد (Y0) المقابل لقيمة المتغير المستقل (T0) والواقعة ضمن مدى قيم المتغير (Ti) بالاستقطاب الداخلي (Interpolation) أما إذا كانت قيمة (T0) واقعة خارج نطاق العينة ، أي خارج مدى قيم (Ti) ، عندئذ يطلق على التنبؤ بقيمة (Y0) بالاستقطاب الخارجي (Extrapolation) ، وبما أن التنبؤ بقيمة (Y0) لا يمكن أن يتم إلا من خلال معرفة $\left(\hat{Y}_0\right)$ والأخيرة هذه تنحرف عن (Y0) بسبب خطأ التقدير .

أولا $\quad Y_0-E\left(Y_0\right)=U_0$

وثانيا بسبب خطأ المعاينة $\quad \hat{Y}_0-E\left(Y_0\right)$

حيث يطلق على الانحراف $\left(Y_0-\hat{Y}_0\right)$ بخطأ التنبؤ (Forecast error) ، ونظرا لاستحالة الحصول على قيمة محددة لـ (Y0) فأنه لابد من تقدير الفترة التي تقع ضمنها القيمة (Y0) بمعامل ثقة معين ، علما أن القيمة المتنبأ بها تحسب وفق الصيغة التالية:

$$\hat{Y}_{0f}=b_0+b_1T_0$$

وبتباين مقداره

$$Var\left(\hat{Y}_{0f}\right)=\sigma_u^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\left(T_0-\overline{T}\right)^2}{\sum t_i^2}\right) \quad \text{.....(36)}$$

وبفترة ثقة كالاتي:

$$Y_0=\hat{Y}_{0f}\pm\left(t_{n-k-1},\frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{Var\left(\hat{Y}_{0f}\right)} \quad \text{.....(37)}$$

مثال تطبيقي:

الجدول التالي يبين كميات الانتاج من سلعة معنية خلال الفترة **1990-1994** ، أوجد خط الاتجاه العام للكميات المنتجة وتنبأ بالكمية المنتجة للعامين القادمين مستخدما مستوى دلالة 5%.

السنوات	1990	1991	1992	1993	1994
الكميات المنتجة (ألف طن)	5	8	12	15	20

الحل:

لإجراء التقدير والتنبؤ لكميات الإنتاج ، يستوجب القيام بالعمليات الحسابية التالية:

T_i	Y_i	T_iY_i	T_i^2
1	5	5	1
2	8	16	4
3	12	36	9
4	15	60	16
5	20	100	25
15	60	217	55

تقدير الميل الحدي للاتجاه العام

$$b_1 = \frac{n\sum T_i Y_i - \sum T_i \sum Y_i}{n\sum T_i^2 - \left(\sum T_i\right)^2} = \frac{185}{50} = 3.7$$

تقدير الحد الثابت لخط الاتجاه العام

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{T} = 12 - 11.1 = 0.9$$

الصيغة التقديرية للاتجاه العام بالكميات المنتجة

$$\hat{Y}_i = 0.9 + 3.7\,T_i$$

التنبؤ بالكميات المنتجة في عام **1995**

$$\hat{Y}_{0f} = 0.9 + (3.7)(6) = 23.1$$

في حين التنبؤ للكميات المنتجة في عام 1996

$$\hat{Y}_{0f} = 0.9 + 3.7(7) = 26.8$$

أسلوب التقدير أعلاه يعرف بالتقدير حول نقطة الأصل ، أي استخدام القيم أو المشاهدات المتمثلة بسلسلة أعداد طبيعية للمتغير المستقل ، نفس التقديرات أعلاه يمكن الحصول عليها عند التعامل مع انحراف المتغير المستقل عن وسطه الحسابي ، وبالتالي التعامل بأسلوب الدمج بين هذه الانحرافات والقيم والمشاهدات الأصلية للمتغير المعتمد ، علما بأن الأسلوب الأخير هذا في التقدير يشتق من أسلوب التقدير حول نقطة المتوسط وكآلاتي:

$$b_1 = \frac{\sum t_i y_i}{\sum t_i^2}$$

حيث أن

$$t_i = T_i - \bar{T} \;, \quad y_i = Y_i - \bar{Y}$$

بالتعويض نحصل على

$$b_1 = \frac{\sum t_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum t_i^2}$$

$$= \frac{\sum t_i Y_i - \bar{Y} \sum t_i}{\sum t_i^2} = \frac{\sum t_i Y_i}{\sum t_i^2}$$

في حين الحد الثابت لصيغة الاتجاه العام يصبح كالاتي:

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{t}$$

$$= \bar{Y} - b_1 \frac{\sum t_i}{n}$$

وبما أن $\sum t_i = 0.0$ ، عليه فإن

$$b_0 = \bar{Y}$$

تطبيق الأسلوب أعلاه ، يتطلب إجراء العمليات الحسابية التالية:

T_i	$t_i = (T_i - \overline{T})$	Y_i	$t_i Y_i$	t_i^2
1	-2	5	-10	4
2	-1	8	-8	1
3	0	12	0	0
4	1	15	15	1
5	2	20	40	4
15	0.0	60	37	10

حيث أن

$$\overline{T} = \frac{\sum T_i}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\therefore b_1 = \frac{\sum t_i Y_i}{\sum t_i^2} = \frac{37}{10} = 3.7$$

$$b_0 = \frac{60}{5} = 12$$

الصيغة التقديرية تعطى كالاتي:

$$\hat{Y}_{0f} = b_0 + b_1 t_i = 12 + 3.7 t_i$$

وبالتالي فإن التنبؤ بالكميات المنتجة في عام 1995

$$Y_{0f} = 12 + 3.7(3) = 23.1$$

في حين التنبؤ بالكميات المنتجة في عام 1996

$$Y_{0f} = 12 + 3.7(4) = 26.8$$

التنبؤات أعلاه مطابقة تماما للنتائج السابقة ، ولغرض وضع التنبؤات أعلاه في فترات ثقة، لا بد من إجراء العمليات الحسابية التالية:

$$\sum t_i^2 = 10 \,, \quad \sum y_i^2 = 138$$

$$\therefore S_e^2 = \frac{\sum y_i^2 - b_1^2 \sum t_i^2}{n-k-1} = \frac{1.1}{3} = 0.37$$

$$\therefore Var(b_1) = \frac{0.37}{10} = 0.037$$

$$Var(b_0) = 0.37\left(\frac{1}{5} + \frac{(3)^2}{10}\right) = 0.41$$

$$R^2 = \frac{b_1^2 \sum t_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{136.9}{138} = 0.99$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 0.9 + 3.7\,T_i \quad , \quad R^2 = 0.99$$

$$S.E \quad (0.64) \quad (0.19) \quad , \quad S_e^2 = 0.37$$

الجدول التالي يبين الكميات المتنبأ بها ($\hat{Y}_{0f}$) مصنفة حسب السنوات مع تشتتها (التباين) والانحراف المعياري لها.

$\hat{Y}_{0f}$	1995	1996
الكميات المتنبأ بها	23.1	26.8
$Var(\hat{Y}_{0f})$	(0.78)	(1.04)
$S.E\ (Y_{0f})$	(0.88)	(1.02)

حيث أن

$$Var(\hat{Y}_{0f})_{95} = 0.37\left(1 + 1/5 + \left(\frac{6-3}{10}\right)^2\right) = 0.78$$

$$Var(\hat{Y}_{0f})_{96} = 0.37\left(1 + 1/5 + \left(\frac{7-3}{10}\right)^2\right) = 1.04$$

تجدر الاشارة هنا إلى أن المؤشرات أعلاه سوف لن تتغير فيما إذا أعتمدت الصيغة المقدرة بأسلوب الدمج والمعادة كتابتها في أدناه:

$$\hat{Y}_i = 12 + 3.7\,t_i$$

ما عدى تباين الحد الثابت المقدر وذلك نتيجة لتغير قيمته حيث سوف يكون مساويا إلى:

$$Var(b_0) = S_e^2\left(\frac{1}{n} + Zero\right) = \frac{S_e^2}{n} = Var(\overline{Y}) = \frac{0.37}{5} = 0.07$$

يلاحظ من المثال أعلاه ، أن عدد السنوات في العينة المدروسة كان فرديا ، لذا جاءت سلسلة الاعداد الطبيعية لانحرافات الزمن أرقام صحيحة ...ti=3,4, ، في حين هذه السلسلة الزمنية سوف تكون متضمنة كسور عندما يكون عدد المشاهدات أو حجم العينة زوجيا ، أي أن .. ti=3.5, 4.5, وكما في المثال التالي:

السنوات	كميات الانتاج Y_i	T_i	$t_i = (T_i - \overline{T})$	T_iY_i	t_i^2
1990	5	1	-2.5	-12.5	6.25
1991	8	2	-1.5	-12	2.25
1992	12	3	-0.5	-6	0.25
1993	15	4	0.5	7.5	0.25
1994	20	5	1.5	30	2.25
1995	25	6	2.5	62.5	6.25
	85		0.0	69.5	17.5

تقدير معالم الصيغة الخطية

$$b_1 = \frac{n\sum t_i Y_i - \sum Y_i \sum t_i}{n\sum t_i^2 - \left(\sum t_i\right)^2} = \frac{\sum t_i Y_i}{\sum t_i^2} = \frac{69.5}{17.5} = 3.97$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \bar{t} = \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{85}{6} = 14.17$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 14.17 + 3.97\, t_i$$

وبنفس الأسلوب أعلاه يمكن إجراء التنبؤات للأعوام القادمة ، أي أن

$$Y_{(0f)96} = 14.17 + 3.97(3.5) = 28.065$$

$$Y_{(0f)97} = 14.17 + 3.9(4.5) = 32.035$$

بالرجوع إلى مثالنا السابق المتضمن عدد فردي من السنوات ، يمكن أن نضع الكميات المتنبأ بها في فترات ثقة وكالاتي:

$$Y_0 = \hat{Y}_{0f} \pm \left(t_{n-k-1}, \frac{\lambda}{2}\right) \sqrt{Var\left(\hat{Y}_{0f}\right)}$$

عليه فإن فترة الثقة للكميات المتنبأ بها لعام 1995

$$Y_0 = 23.1 \pm (3.18)(0.88)$$

$$= 23.1 \pm 2.7984$$

$$\therefore pr[20.3016 < Y_0 < 25.8984] = 0.95$$

وكذلك فترة الثقة للكميات المتنبأ بها لعام 1996

$$Y_0 = 26.8 \mp (3.18)(1.02)$$

$$= 26.8 \pm 3.2436$$

$$\therefore pr[23.5564 < Y_0 < 30.0436] = 0.95$$

من النتائج أعلاه ، يمكن القول بأن الكميات المتنبأ بها لعام 1995 ولعام 1996 ، بمعامل ثقة قدره (5%) تتراوح ما بين (20.3016) و (25.8984) وكذلك (23.5564) و (30.0436) على التوالي.

تجدر الاشارة هنا، إلى أن اسلوب التنبأ أعلاه مبني على أساس أن الظاهرة المطلوب التنبؤ بها دالة خطية في الزمن. في كثير من الأحيان يأخذ الاتجاه العام للظاهرة المدروسة، شكل الدالة الاسية ، خاصة في حالة نمو الظاهرة بوتائر ثابتة ، على امتداد فترات زمنية معينة، في مثل هذه الحالات تأخذ صيغة الاتجاه العام الشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 \beta_i^{T_i} U_i$$

حيث أن

Y_i : تمثل قيمة الظاهرة (المتغير المعتمد)

β_0 , β_1: معالم صيغة الاتجاه العام

T_i : الزمن مقاس بوحدات زمنية معينة

U_i : تمثل الخطأ العشوائي

لتقدير معالم النموذج الاسي أعلاه، يتطلب تحويله إلى الشكل الخطي، ويتم ذلك بأخذ اللوغارتيم لطرفيه وكالاتي :

$$\log Y_i = \log \beta_0 + T_i \log \beta_1 + \log U_i$$

حيث أن

$$\log U_i \sim N\left(0, \sigma_u^2\right)$$

وبأتباع اسلوب (OLS) ، يمكن الوصول إلى تقدير لكل من الحد الثابت $(\log \beta_0)$ والميل الحدي $(\log \beta_1)$، وكالاتي

$$\log b_1 = \frac{n\sum T_i \log Y_i - \left(\sum T_i\right)\left(\sum \log Y_i\right)}{n\sum T_i^2 - \left(\sum T_i\right)^2}$$

$$\log b_0 = \overline{\log Y} - \left(\log b_1\right)\overline{T}$$

وبنفس الاسلوب السابق يمكن ان نجد تباين هذه المعالم وبالتالي القيم التنبؤية للظاهرة ثم تباين العينة وفترات الثقة لهذه القيم التنبؤية، مع ملاحظة التعامل مع القيم الأصلية لسلسة الأعداد الطبيعية لتمثيل الحقبة الزمنية كمتغير مستقل ، في حين المتغير المعتمد سوف يقاس باللوغاريتمات ، مثل هذا الاسلوب يعرف بالتقدير حول نقطة الاصل وهو مطابق تماما للتقديرات الحاصل عليها في حالة التعامل مع انحرافات كل من المتغير المعتمد والمتغير المستقل ، أي في حالة التقدير حول نقطة المتوسط.

لتوضيح الفكرة الاساسية لكيفية اجراء التقدير في حالة تحليل الاتجاه العام للدوال الاسية ، أخذت عينة عشوائية ذات حجم n=10 لانتاج أحد المصانع لسلعة معينة في بلد معين وكما في الجدول التالي:

الانتاج (Y_i)	السنوات
81.8	1985
101.1	1986
107.7	1987
129.2	1988
445.7	1989
592.6	1990
681.0	1991
749.9	1992
773.0	1993
1040.0	1994

لتقدير الاتجاه العام للظاهرة التي أخذت شكل الدالة الاسية لا بد من القيام بالعمليات الحسابية التالية:

T_i	T_i^2	$Log\ Y_i$	$(logY_i)T_i$
1	1	1.9128	1.9128
2	4	2.0048	4.0096
3	9	2.0241	6.0723
4	16	2.1113	8.4452
5	25	2.649	13.2450
6	36	2.7728	16.6368
7	49	2.8332	19.8324
8	64	2.8750	23.000
9	81	2.8882	25.9938
10	100	3.0170	30.170
55	385	25.0882	149.3179

يقدر الميل الحدي للظاهرة بالشكل التالي

$$\log(b_1) = \frac{(10)(149.3179) - (55)(25.0882)}{(10)(385) - (55)^2} = 0.1373673$$

$$\therefore b_1 = Anti - \log(0.1373673) = 1.372$$

أما الحد الثابت فيقدر كالاتي

$$\log(b_0) = \frac{25.0882}{10} - (0.1373673)\left(\frac{55}{10}\right)$$

$$\therefore \log(b_0) = 1.7533$$

$$\therefore b_0 = Anti - \log(1.7533) = 56.663$$

وبالتالي فإن الصيغة التقديرية للدالة الاسية ، يمكن أن تكتب في أحد الصورتين

$$\log \hat{Y}_i = 1.7533 + 0.1373673\, T_i$$

أو

$$\hat{Y}_i = (56.663)(1.372)^{T_i}$$

و التنبؤ بمسار الظاهرة ، يتم من خلال التعويض بالمتغير (Ti) ، فعلى سبيل المثال كميات الانتاج المتنبأ بها في عام 1995 أي Ti=11

$$\log Y_{0f(95)} = 1.7533 + 0.1373673(11) = 3.2643403$$

$$\therefore Y_{0f(95)} = \text{Anti} - \log(3.2643403) = 1837.9780$$

أو بأستخدام الصيغة التالية

$$Y_{0f(95)} = (56.663)(1.372)^{11}$$

$$= (56.663)(32.426) = 1837.3623$$

وكذلك يمكن ايجاد فترة الثقة لهذه القيم التنبؤية ، حيث يتم تقييم المعالم المقدرة من خلال حساب التباين أي أن

$$Var(b_0) = S_e^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{T}^2}{\sum T_i^2 - n\overline{T}^2}\right]$$

$$= S_e^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{T}^2}{\sum t_i^2}\right)$$

$$Var(b_1) = \frac{S_e^2}{\sum T_i^2 - n\overline{T}^2} = \frac{S_e^2}{\sum t_i^2}$$

حيث أن

$$S_e^2 = \frac{\sum \log Y_i^2 - \log(b_0)\sum \log Y_i - \log(b_1)\sum T_i \log Y_i}{n-k-1}$$

$$= \frac{\sum(\log y_i)^2 - \log(b_1)^2 \sum t_i^2}{n-k-1}$$

علما بأن

$$\log y_i = \log Y_i - \overline{\log Y} \quad , \quad t_i = T_i - \overline{T}$$

أما معامل الارتباط البسيط فيعطى وفق الصيغة التالية:

$$r_{\log Y.T} = \frac{\sum T_i \log Y_i - n\overline{\log Y}.\overline{T}}{\sqrt{\left[\sum T_i^2 - n\overline{T}^2\right]\left[\sum \log Y_i^2 - n\overline{\log Y}^2\right]}}$$

وبعد التأكد من دقة ومعنوية المعالم المقدرة للدالة الاسية ، يمكن حساب تباين أي قيمة تقديرية وكالاتي:

$$Var\left(\hat{Y}_0\right) = S_e^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\left(T_0 - \overline{T}\right)^2}{\sum t_i^2}\right)$$

وبالتالي وضع حدود ثقة لهذه القيمة التقديرية وكذلك للقيمة المتنبأ بها ، حيث يتم حساب تباين التنبؤ وفق الصيغة التالية:

$$Var\left(\hat{Y}_{0f}\right) = S_e^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(T_0 - \overline{T}\right)}{\sum t_i^2}\right)$$

وبفترة ثقة كالاتي:

$$Y_0 = \hat{Y}_{0f} \pm \left(t_{n-k-1},\ \frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{Var\left(\hat{Y}_{0f}\right)}$$

تجدر الاشارة هنا إلى أن من مزايا تحليل الدوال الاسية هو إمكانية قياس وتيرة النمو للظاهرة المدروسة، (Growth rate) . فالقيمة التقديرية لأي فترة زمنية ما هي إلا عبارة عن القيمة التقديرية لفترة سابقة مضافا إليها مقدار ما تحقق من زيادة أو نقصان خلال تلك الفترة، أي أن

$$\hat{Y}_i = \hat{Y}_{i-1} + \Delta\hat{Y}_{i-1}$$

بالتقسيم على القيمة التقديرية المتحققة خلال الفترة السابقة

$$\frac{\hat{Y}_i}{\hat{Y}_i - 1} = \frac{\hat{Y}_{i-1}}{\hat{Y}_{i-1}} + \frac{\Delta\hat{Y}_{i-1}}{\hat{Y}_{i-1}}$$

وبما أن الميل الحدي ما هو إلا عبارة عن نسبة القيمة التقديرية للمتغير المعتمد $\left(\hat{Y}_i\right)$ في سنة معينة إلى قيمته في السنة السابقة ، أي أن $b_1 = \frac{\hat{Y}_i}{\hat{Y}_{i-1}}$ ، وبما إن الحد الأخير من الصيغة أعلاه يمثل وتيرة النمو $G_r = \frac{\Delta\hat{Y}_{i-1}}{\hat{Y}_{i-1}}$ ، وهذا يعني

$b_1 = 1 + G_r$

$\therefore G_r = b_1 - 1$

وفي حالة مثالنا اعلاه ، تكون وتيرة نمو الانتاج مساوية إلى

$G_r = 1.372 - 1 = 0.372$

أي أن الانتاج ينمو بوتيرة قدرها **37.2%** خلال الفترة **1985-1994.**

الزاوية الثانية: تحليل الانحدار بإعتماد عدة متغيرات مستقلة

في الجزء أعلاه أعتمد الزمن مقاسا بسلسلة أعداد طبيعية كمتغير مستقل في النموذج، مثل هذا الاسلوب في التنبؤ وسع ليشمل كافة المتغيرات المؤثرة في الظاهرة المدروسة ، وبالتالي استخدمت أساليب القياس الاقتصادي في تقدير معالم النماذج الخطية أو غير الخطية، لذا يستوجب على الباحث أن يشخص أولا وبشكل دقيق كافة المتغيرات التي تؤثر في الظاهرة ومن ثم بناء النموذج الملائم للدالة المحددة لتلك الظاهرة ، أي أن

$$Y_i = f\left(X_{ij}\right)$$

حيث أن

Y_i : تمثل الظاهرة المطلوب التنبؤ لها

X_{ij} : تمثل المتغيرات المستقلة

$i=1, 2, \ldots, n$ ، $j = 0, 1, 2, \ldots, k$

الدالة أعلاه تبين المتغيرات المستقلة المؤثرة في الظاهرة المدروسة ، ويمكن أن تكون متغيرات مشخصة مسبقا تؤثر في تحديد المتغير المعتمد **(Yi)** (الظاهرة المدروسة) ، أو أن تكون متغيرات مشتقة من الظاهرة نفسها مثل **Yi-1** و **Yi-2** ......الخ. أي ان الظاهرة في الفترة **(i)** تعتمد في تكوينها على الفترة **(i-1)** أو ما يعرف بالمتغيرات المرتدة زمنيا **(Lagged variables).**

بعد تشخيص المتغيرات المستقلة ، يمكن تمثيلها بصيغة معينة ولتكن الصيغة الخطية التالية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + U_i$$

أو بشكل أكثر اختصارا

$$Y_i = \sum_{j=0}^{k} \beta_j X_{ij} + U_i$$

حيث أن

حجم العينة $i=1, 2, \ldots, n$

عدد المعالم $j=0, 1, 2, \ldots, k \quad , \quad X_{i0}=1$

وبإستخدام المصفوفات والموجهات ، يمكن وضع النموذج الخطي أعلاه بالشكل التالي

$$Y = X\beta + U$$

حيث أن

Y : موجه لمشاهدات المتغير المعتمد ذو مرتبة (nx1)

X : مصفوفة لمشاهدات المتغيرات المستقلة ذات مرتبة (n x k +1)

β : موجه للمعالم ذو مرتبة (K+1 x 1)

U : موجه للاخطاء العشوائية ذو مرتبة (n x 1)

وفي ظل فرضية التجانس ، أي

$$U \sim N\left(0, \sigma_u^2 I_n\right)$$

$$E\left(U_i U_j\right) = 0 \qquad \forall\, i \neq j$$

يمكن تقدير معالم الصيغة الخطية ، وذلك من خلال تطبيق اسلوب المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) ، أي أن

$$U = Y - X\beta$$

$$\therefore U'U = \left(Y - X\beta\right)' \left(Y - X\beta\right)$$

وكما بينا في الفصول السابقة من هذا الكتاب ، مقدرات (OLS) ، يمكن الحصول عليها مباشرة بعد أخذ التفاضل الجزئي الأول نسبة إلى موجه المعالم (β) ، أي أن

$$\frac{\partial\, U'U}{\partial \beta'} = 0$$

$$\therefore \mathbf{b}_{LS} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_k \end{bmatrix}_{LS} = (\mathbf{X'X})^{-1}\,\mathbf{X'Y} \quad \text{.......... (38)}$$

التقدير أعلاه ، تقديرا غير متحيز ويمتلك مصفوفة تباين وتباين مشترك كالاتي:

$$\mathbf{Var - Cov}(\mathbf{b}_{LS}) = \sigma_u^2\,(\mathbf{X'X})^{-1} \quad \text{.......... (39)}$$

حيث أن

$$\mathbf{E}(\mathbf{S}_e^2) = \sigma_u^2$$

علما بأن تباين العينة $(\mathbf{S}_e^2)$ بقدر وفق الصيغة التالية

$$\mathbf{S}_e^2 = \frac{\mathbf{Y'Y - b'_{LS}X'y}}{\mathbf{n-k-1}} \quad \text{.......... (40)}$$

بعد الحصول على المؤشرات أعلاه ، يمكن تقييم الصيغة التقديرية ، أي أختيار مدى دقة ومعنوية موجه المعالم المقدرة وبالتالي استخدامها في التنبؤ للظاهرة المدروسة.

وبما أن أي قيمة تنبؤية تتضمن على نسبة معينة من الخطأ أو عدم الدقة ، لذا يجب أن تخضع هذه القيم لمقاييس الدقة واختبارات تقييم القوة التنبؤية ، لهذا السبب يفضل التعبير عن القيم التنبؤية في صورة فترات ثقة وكما اسميناه سابقا بالتنبؤ الفتروي للتنبؤات النقطية ، لذا فإن فترة الثقة لقيمة المتغير المعتمد (Yo) المقابلة لقيمة المتغيرات المستقلة (X0) والواقعة ضمن نطاق العينة المدروسة تسمى بالتقدير أو الاستقطاب الداخلي ، وعليه فإن الخطوة الأولى لاجراء مثل هذه التقديرات تتطلب اشتقاق متباينة لتقدير المجال الذي يمكن أن تقع فيه قيمة E (Y0) المقابلة لتشكيلة معينة من قيم مشاهدات المتغيرات المستقلة .

$$\mathbf{X}_{00}\,,\ \mathbf{X}_{10}\ ,\ \mathbf{X}_{20}\,,\ \ldots\ ,\ \mathbf{X}_{k0}$$

حيث أن

$$\mathbf{j=0, 1, 2, \ldots, k} \qquad \text{،} \qquad \mathbf{X}_{00}=\mathbf{1}$$

ويتم مثل هذا النوع من الاستقطاب الداخلي بموجب الصيغة التالية:

$$\hat{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{X}_0\,\mathbf{b}_{LS}$$

أو

$$\hat{Y}_0 = \begin{bmatrix}1 & X_{10} & X_{20} & \cdots & X_{k0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots \\ b_k\end{bmatrix}_{LS}$$

أما وسط وتباين القيمة $(\hat{Y}_0)$ فيعطى وفق الصيغ التالية

$$E(\hat{Y}_0) = E(X_0 b) = X_0 \beta$$

$$Var(\hat{Y}_0) = S_e^2\left[(X_0 - \overline{X})(x'x)^{-1}(X_0 - \overline{X}) + \frac{1}{n}\right] \quad \text{.......(41)}$$

حيث أن

S_e^2 : يمثل تباين العينة المدروسة

n : يمثل حجم العينة

X_0 : يمثل موجه لمشاهدات المتغيرات المستقلة المقابلة للقيمة المفردة للمتغير المعتمد.

$(x'x)$: تمثل مصفوفة حاصل جمع وضرب المتغيرات المستقلة مقاسة بالانحرافات.

وبالتالي يمكن وضع حدود ثقة للقيمة $E(Y_0)$ بالشكل التالي:

$$E(Y_0) = \hat{Y}_0 \pm \left[t_{(n-k1)}, \frac{\lambda}{2}\right]. \sqrt{Var(\hat{Y}_0)} \quad \text{.......(42)}$$

حيث أن (λ) تمثل مستوى المعنوية.

أما إذا كانت قيمة (X0) واقعة خارج نطاق العينة المدروسة ، أي خارج مدى قيم (Xij)، عندها يطلق على التنبؤ بقيمة (Y0) بالاستقطاب الخارجي (Extrapolation) وبما أن التنبؤ بقيمة (Y0) لا يمكن أن يتم إلا من خلال معرفة $(\hat{Y}_0)$ والتي بدورها تنحرف عن (Y0) بمقدار خطأ التنبؤ ، أي أن

خطأ التنبؤ = $Y_0 - \hat{Y}_0$

وبالتالي يمكن حساب تباين هذا الخطأ بالشكل التالي:

$$Var\left(Y_0 - \hat{Y}_0\right) = Var\,\hat{Y}_{0f} = S_e^2\left[\left(X_0 - \overline{X}\right)(x'x)^{-1}\left(X_0 - \overline{X}\right) + \frac{1}{n}\right] + S_e^2 \quad \text{.....................(43)}$$

ومنه يمكن وضع حدود ثقة للقيمة المتنبأ بها كالاتي ، علما بأن القيمة المتنبأ بها تحسب وفق الصيغة التالية:

$$\hat{Y}_{0f} = X_0 b_{LS}$$

$$Y_0 = \hat{Y}_{0f} \pm \left(t_{n-k-1}\ ,\ \frac{\lambda}{2}\right) . \sqrt{Var\left(\hat{Y}_{0f}\right)} \quad \text{.....................(44)}$$

<u>مثال تطبيقي:</u>

لدراسة العلاقة بين متوسط انفاق الفرد (Yt) ومتوسط دخله القابل للتصرف (X1t) ، إضافة إلى متوسط إنفاقه للسنوات السابقة (Yt-1) ، تم تقدير معالم الصيغة الخطية التالية:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 Y_{t-1} + U_t$$

وذلك بالاعتماد على بيانات عينة عشوائية ذات حجم (n=17) ستة وقد كانت العمليات الحسابية كالاتي:

$$\sum Y_t = 1816.27\ ,\qquad \sum X_{1t} = 2245.55\ ,\qquad \sum Y_{t-1} = 1702.57\ ,$$
$$\sum X_{1t}^2 = 330182.7025\ ,\qquad \sum Y_{t-1}^2 = 192593.0409\ ,\qquad \sum Y_t^2 = 221916.2707\ ,$$
$$\sum X_{1t} Y_t = 269159.988\ ,\qquad \sum Y_t Y_{t-1} = 204717.03\ ,\qquad \sum X_{1t} Y_{t-1} = 249413.499$$

<u>المطلوب:</u>

وضع فترة ثقة للتنبؤ بمعدل نصيب الفرد الواحد من الاستهلاك إذا علمت أن حصة الفرد من الدخل القابل للتصرف ستبلغ في سنة الهدف (300) دينار ومتوسط انفاقه للسنة السابقة (250) دينار ،مستخدما معامل ثقة قدره (5%) .

<u>الحل:</u>

معالم الصيغة يمكن تقديرها في ظل فرضية التجانس ، أي في حالة الافتراض التالي

$$U_t \sim N\left(0,\ \sigma_u^2 I_n\right) \quad , \quad E\left(U_0\, U_t'\right) = 0 \quad \forall \quad t = t'$$

وذلك باستخدام اسلوب المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{LS} = (X'X)^{-1} X'Y$$

حيث أن

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1t} & \sum Y_{t-1} \\ \sum X_{1t} & \sum X_{1t}^2 & \sum X_{1t} Y_{t-1} \\ \sum Y_{t-1} & \sum Y_{t-1} X_{1t} & \sum Y_{t-1}^2 \end{bmatrix}$$

وباستخدام البيانات المعطاة ، نحصل على

$$X'X = \begin{bmatrix} 17 & 2245.55 & 1702.57 \\ & 330182.7025 & 249413.499 \\ & & 192593.0409 \end{bmatrix}$$

وأن

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{1t} Y_t \\ \sum Y_{t-1} Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1816.27 \\ 269159.988 \\ 204717.03 \end{bmatrix}$$

وبإجراء العمليات الحسابية اللازمة نحصل على التقديرات التالية:

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{LS} = \begin{bmatrix} -9.531 \\ 0.617 \\ 0.348 \end{bmatrix}$$

ولتقييم معالم الصيغة التقديرية أعلاه ، يستوجب حساب المؤشرات التالية

$$S_e^2 = \frac{Y'Y - b'_{LS} X'Y}{n-k-1} = 134.4308664$$

$$Var - cov(b_{LS}) = S_e^2 (X'X)^{-1}$$

وبتوظيف بيانات العينة إلى جانب تباين العينة المقدر نحصل على

$$S.E.(b_0) = 8.844237 \text{ , } S.E(b_1) = 0.1456571 \quad , \quad S.E(b_2) = 0.1795939$$

ولاختيار مدى معنوية العلاقة الخطية المفترضة لتقدير معالم دالة الاستهلاك ، لا بد من حساب (R^2) ويتم ذلك وفق الصيغة التالية

$$R^2 = \frac{b'X'Y}{Y'Y} = \frac{b'X'Y}{\sum Y_i^2} = 0.93246$$

وبالتالي فإن الصيغة التقديرية لدالة الاستهلاك يمكن أن توضع كالاتي:

$$\hat{Y}_t = -9.531 + 0.617\,X_{1t} + 0.348 Y_{t-1}$$
$$S.E \quad (8.844)\ (0.146) \quad (0.1796) \quad , \quad R^2 = 0.93246$$

وبإعتماد الصيغة التقديرية ، يمكن احتساب فترة الثقة للتنبؤ بمعدل نصيب الفرد الواحد من الاستهلاك عندما يكون دخل الفرد في سنة الهدف (300) دينار ومتوسط انفاقه للسنة السابقة (250) دينار وذلك بتطبيق الصيغة التالية:

$$\hat{Y}_{0f} = X_0\, b_{LS} = [1 \quad 300 \quad 250]\begin{bmatrix} -9.532 \\ 0.617 \\ 0.348 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_{0f} = 262.568$$

حيث يتم حساب تباين هذه القيمة المتنبأ بها $Var(\hat{Y}_{0f})$ بموجب الصيغة التالية:

$$Var(\hat{Y}_{0f}) = S_e^2\left[(X_0 - \overline{X})(x'x)^{-1}(X_0 - \overline{X}) + \frac{1}{n}\right] + S_e^2$$

علما بأن $S_e^2 = 134.4308664$

$$\therefore Var(\hat{Y}_{0f}) = 327.1122705$$

$$\therefore \sqrt{Var(\hat{Y}_{0f})} = S.E(\hat{Y}_{0f}) = 18.08624$$

وبذلك يكون الحد الادنى والاعلى لمتوسط انفاق الفرد في سنة الهدف عند مستوى ثقة قدره (5%)

$$Y_0 = \hat{Y}_{0f} \pm \left(t_{n-k-1}\,,\,\frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{Var(\hat{Y}_{0f})}$$

$$Y_0 = 262.568 \pm (2.145)(18.08624)$$

$$\therefore pr[223.773 < Y_0 < 301.363] = 0.95$$

التنبؤ بقيمة (Y_0) لا يمكن أن يتم إلا من خلال معرفة $(\hat{Y}_0)$ والتي بدورها تنحرف عن (Y_0) بمقدار خطأ التنبؤ ، أي أن

خطأ التنبؤ = $Y_0 - \hat{Y}_0$

وبالتالي يمكن حساب تباين هذا الخطأ بالشكل التالي

$$Var\left(Y_0 - \hat{Y}_0\right) = Var\,\hat{Y}_{0f} = S_e^2\left[\left(X_0 - \overline{X}\right)(x'x)^{-1}\left(X_0 - \overline{X}\right) + \frac{1}{n}\right] + S_e^2 \quad \text{.....................(45)}$$

ومنه يمكن وضع حدود ثقة للقيمة المتنبأ بها كالاتي ، علما بأن القيمة المتنبأ بها تحسب وفق الصيغة التالية

$$\hat{Y}_{0f} = X_0 b_{LS}$$

$$Y_0 = \hat{Y}_{0f} \pm \left(t_{n-k-1}\,,\ \frac{\lambda}{2}\right).\sqrt{Var\left(\hat{Y}_{0f}\right)} \quad \text{.....................(46)}$$

مثال تطبيقي:

لدراسة العلاقة بين متوسط انفاق الفرد (Y_t) ومتوسط دخله القابل للتصرف (X_{1t}) ، إضافة إلى متوسط إنفاقه للسنوات السابقة (Y_{t-1}) ، تم تقدير معالم الصيغة الخطية التالية:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 Y_{t-1} + U_t$$

وذلك بالاعتماد على بيانات عينة عشوائية ذات حجم (n=17) ستة وقد كانت العمليات الحسابية كالاتي:

$$\sum Y_t = 1816.27\ , \quad \sum X_{1t} = 2245.55\ , \quad \sum Y_{t-1} = 1702.57\ ,$$
$$\sum X_{1t}^2 = 330182.7025\ , \quad \sum Y_{t-1}^2 = 192593.0409\ , \quad \sum Y_t^2 = 221916.2707\ ,$$
$$\sum X_{1t} Y_t = 269159.988\ , \quad \sum Y_t Y_{t-1} = 204717.03\ , \quad \sum X_{1t} Y_{t-1} = 249413.499$$

المطلوب:

وضع فترة ثقة للتنبؤ بمعدل نصيب الفرد الواحد من الاستهلاك إذا علمت أن حصة الفرد من الدخل القابل للتصرف ستبلغ في سنة الهدف (300) دينار ومتوسط انفاقه للسنة السابقة (250) دينار ،مستخدما معامل ثقة قدره (5%) .

الحل:

معالم الصيغة يمكن تقديرها في ظل فرضية التجانس ، أي في حالة الافتراض التالي

$$U_t \sim N\left(0,\ \sigma_u^2 I_n\right) \quad , \quad E\left(U_0\, U_t'\right) = 0 \quad \forall \quad t = t'$$

وذلك باستخدام اسلوب المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{LS} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$$

حيث أن

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1t} & \sum Y_{t-1} \\ \sum X_{1t} & \sum X_{1t}^2 & \sum X_{1t} Y_{t-1} \\ \sum Y_{t-1} & \sum Y_{t-1} X_{1t} & \sum Y_{t-1}^2 \end{bmatrix}$$

وباستخدام البيانات المعطاة ، نحصل على

$$X'X = \begin{bmatrix} 17 & 2245.55 & 1702.57 \\ & 330182.7025 & 249413.499 \\ & & 192593.0409 \end{bmatrix}$$

وأن

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{1t} Y_t \\ \sum Y_{t-1} Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1816.27 \\ 269159.988 \\ 204717.03 \end{bmatrix}$$

وبإجراء العمليات الحسابية اللازمة نحصل على التقديرات التالية:

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{LS} = \begin{bmatrix} -9.531 \\ 0.617 \\ 0.348 \end{bmatrix}$$

ولتقييم معالم الصيغة التقديرية أعلاه ، يستوجب حساب المؤشرات التالية

$$S_e^2 = \frac{Y'Y - b_{LS}' X'Y}{n - k - 1} = 134.4308664$$

$$Var - cov\left(b_{LS}\right) = S_e^2 \left(X'X\right)^{-1}$$

وبتوظيف بيانات العينة إلى جانب تباين العينة المقدر نحصل على

$$S.E.\left(b_0\right) = 8.844237\ ,\ S.E\left(b_1\right) = 0.1456571 \quad , \quad S.E\left(b_2\right) = 0.1795939$$

ولاختيار مدى معنوية العلاقة الخطية المفترضة لتقدير معالم دالة الاستهلاك ، لا بد من حساب (R2) ويتم ذلك وفق الصيغة التالية

$$R^2 = \frac{b'X'Y}{Y'Y} = \frac{b'X'Y}{\sum Y_i^2} = 0.93246$$

وبالتالي فإن الصيغة التقديرية لدالة الاستهلاك يمكن أن توضع كالاتي:

$$\hat{Y}_t = -9.531 + 0.617\, X_{1t} + 0.348 Y_{t-1}$$

$$\text{S.E} \quad (8.844) \;\; (0.146) \quad\; (0.1796) \qquad , \qquad R^2 = 0.93246$$

وبإعتماد الصيغة التقديرية ، يمكن احتساب فترة الثقة للتنبؤ بمعدل نصيب الفرد الواحد من الاستهلاك عندما يكون دخل الفرد في سنة الهدف (300) دينار ومتوسط انفاقه للسنة السابقة (250) دينار وذلك بتطبيق الصيغة التالية:

$$\hat{Y}_{0f} = X_0\, b_{LS} = \begin{bmatrix} 1 & 300 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9.532 \\ 0.617 \\ 0.348 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_{0f} = 262.568$$

حيث يتم حساب تباين هذه القيمة المتنبأ بها $Var\left(\hat{Y}_{0f}\right)$ بموجب الصيغة التالية:

$$Var\left(\hat{Y}_{0f}\right) = S_e^2\left[\left(X_0 - \overline{X}\right)\left(x'x\right)^{-1}\left(X_0 - \overline{X}\right) + \frac{1}{n}\right] + S_e^2$$

علما بأن $S_e^2 = 134.4308664$

$$\therefore Var\left(\hat{Y}_{0f}\right) = 327.1122705$$

$$\therefore \sqrt{Var\left(\hat{Y}_{0f}\right)} = S.E\left(\hat{Y}_{0f}\right) = 18.08624$$

وبذلك يكون الحد الادنى والاعلى لمتوسط انفاق الفرد في سنة الهدف عند مستوى ثقة قدره (5%)

$$Y_0 = \hat{Y}_{0f} \pm \left(t_{n-k-1}\, ,\, \frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{Var\left(\hat{Y}_{0f}\right)}$$

$$Y_0 = 262.568 \pm (2.145)(18.08624)$$

$$\therefore pr\left[223.773 < Y_0 < 301.363\right] = 0.95$$

2.8 تحليل دوال الإنتاج

تعرف العلاقات التي تربط ما بين كميات الانتاج وعناصر الانتاج اللازمة لانتاجها بـدوال الانتـاج (Production function) وتبرز عادة في مثل هذه العلاقات بعض الصعوبات في الجانب التطبيقي ، حيث انه كثيرا ما يتم انتاج عدة سلع سوية مما يولد تداخلا ما بين الكميات المنتجة وكميات عناصر الانتاج للسلع المختلفة لذا غالبا ما يعبر عن الانتاج بمجموعه قيمة الانتاج لكل السلع وهذا بدوره يتطلب بطبيعة الحال الى بقاء العلاقة النسبية ما بين اسعار السلع المنتجة ثابتة .

بشكل عام يمكن كتابة دالة الانتاج بالشكل التالي :

$$Y_i = f(L_i, K_i) \quad \text{.........} (47)$$

حيث ان

(Y_i) تمثل حجم الناتج (output) مقاسا بالقيمة المضافة الاجمالية أو بقيمة الناتج المحلي الاجمالي في حالة تقدير دالة الانتاج على الصعيد الكلي .

(L_i) تمثل حجم الاستخدام (العمالة) (Laboure) مقاسا بمعدل عدد المشتغلين او بمجموع ساعات العمل الفعلية المبذولة خلال فترة معينة .

(K_i) تمثل حجم رأس المال الثابت (Fixed Capital) ويقاس رأس المال الثابت على الصعيد الجزئي باجمالي قيمة الاصول الثابتة وعلى الصعيد القومي على اساس تراكم رأس المال الثابت (Stock of Capital) .

ومن أهم الشروط التي يجب توفرها في دالة الانتاج المذكورة اعلاه هو عدم وجود الانتاج في حالة غياب احد العنصرين ، أي ان :

$$Y_i = 0 = f(0, K_i) = f(L_i, 0)$$

كما وان الانتاجية الحدية للعمل (MP_L) تكون موجبة ، أي إن

$$MP_L = \frac{\partial Y_i}{\partial L_i} \geq 0$$

الشرط اعلاه يعني دفع مشتغل اضافي الى العملية الانتاجية يسبب دائما تحقيق زيادة موجبة في حجم الناتج والاخير هذا بدوره ينمو نموا متباطئاً نتيجة زيادة عدد العاملين بمعدلات نمو ثابتة، أي ان :

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial L_i^2} < 0$$

وكذلك الحال بالنسبة الى رأس المال الثابت ، حيث ان زيادة ادوات العمل مع الابقاء على عدد العاملين ذاته يؤدي الى زيادة حجم الناتج ، الا ان نسبة الزيادة في حجم الناتج لا توازي نسبة الزيادة في رأس المال الثابت وانما تكون اقل منها ويعود ذلك الى انخفاض درجة الاستفادة من ادوات العمل الاضافية بالمعدل كلما ازداد حجمها المطلق بسبب محدودية عدد العاملين ، يتضح من ذلك بان الإنتاجية الحدية لرأس المال الثابت يجب ان تكون موجبة ويعبر عنها رياضيا كالاتي :

$$MP_k = \frac{\partial Y_i}{\partial K_i} \geq 0$$

وكذلك الحال :

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial K_i^2} < 0$$

اضافة الى اعلاه ، يمكن بيان من خلال تحليل دوال الانتاج اثر الحجم على الانتاج (**Return to Scale**) ، فاذا تغيرت كافة عناصر الانتاج بنسبة ثابتة ولنفرض بمقدار (•) عندها يمكن القول بان عائد الانتاج للحجم (غلة الحجم) ثابتا ، أي أن :

$$f(\alpha L_i, \alpha K_i) = \alpha f(L_i , K_i)$$

ويكون عائد الانتاج للحجم متزايد اذا ما تغير الانتاج بنسبة اعلى من تغير عنصري العمل ورأس المال الثابت ، أي :

$$f(\alpha L_i, \alpha K_i) > \alpha f(L_i, K_i)$$

اما اذا تغير الانتاج بنسبة اقل من نسبة تغير عنصري الانتاج عندئذ يكون عائد الانتاج للحجم متناقصا ، أي :

$$f(\alpha L_i, \alpha K_i) < \alpha f(L_i, K_i)$$

ومن المؤشرات الاخرى التي يمكن ان تستخلص من دوال الانتاج هو ما يعرف بمرونة الاحلال (**Elasticity of substitution**) وتعرف بانها نسبة التغير النسبي في عنصري الانتاج الى التغير النسبي في الانتاجية الحدية لعناصر الانتاج أي :

$$\text{مرونة الاحلال} = \frac{d\ln(K_i/L_i)}{d\ln(MP_L/MP_K)} \qquad \text{(48)}$$

يتضح من الصيغة اعلاه بان قيمة مرونة الاحلال دائما موجبة وتكون مساوية الى الصفر في حالة عدم وجود احلال بين عناصر الانتاج ومساوية الى ما لانهاية في الحالة التي يكون ذذفيها كل عنصر من عناصر الانتاج بديل تام للعنصر الاخر كما هو عليه في دالة الانتاج الخطية . اذن طبيعة ونوعية مرونة الاحلال الواردة في العلاقة رقم (48) هي التي تحدد الصيغة التي يمكن ان تاخذها دالة الانتاج المرقمة (47) ، ففي الحالة التي يفترض فيها بان مرونة الاحلال مساوية للصفر ، تاخذ دالة الانتاج شكل صيغة المستخدم ـ المنتج (**Output–Input**) التالية :

$$Y_i = \min\left(\frac{L}{a}, \frac{K}{b}\right) \qquad (49)$$

حيث ان (**a**) تمثل مقدار العمل لانتاج وحدة واحدة و (**b**) تمثل مقدار رأس المال لانتاج وحدة واحدة ، ويتم تحديد قيمها على اساس العلاقة التكنولوجية الثابتة بين عنصري الانتاج .

في ضوء افتراض ثبات مرونة الإحلال ، تأخذ دالة الانتاج صيغة دالة الانتاج ذات مرونة الإحلال الثابتة (**Constant Elasticity of Substitution Production Function**) التالية :

$$E(Y_i) = \beta_0 \left[\beta_1 L_i^{-\eta} + (1-\beta_1) K_i\right]^{\frac{-1}{\eta}} \qquad (50)$$

حيث ان :

($\bullet_0$) تمثل معلمة القياس وقيمتها موجبة دائما .

($\bullet_1$) تمثل التوزيع النسبي لكل من العمل ورأس المال وقيمتها محصورة بين الصفر والواحد الصحيح .

($\bullet$) تعرف بمعلمة الاحلال .

وعندما تقترب قيمة ($\bullet$) الى الصفر تتحول دالة الانتاج ذات مرونة الاحلال الثابتة الى صيغة كوب - دوكلاس (**Douglas Cobb Function**) وكالاتي :

$$Y_i = \beta_0 L_i^{\beta_1} . K_i^{1-\beta_1}$$

الصيغة اعلاه تتصف بخاصية ثبات عائد الحجم وبموجبها قيمة مرونة الاحلال تساوي واحد صحيح ، وبوضع المقدار $1-\beta_1 = \beta_2$ ، حيث ان $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ، يمكن إعادة كتابة دالة كوب – دوكلاس للإنتاج أعلاه بالصيغة التالية:

$$Y_i = \beta_0 L_i^{\beta_1} . K_i^{\beta_2} . U_i \qquad (51)$$

حيث أن (U_i) يمثل الخطأ العشوائي.

وتعد دالة كوب-دوكلاس اكثر دوال الانتاج استخداما في التطبيق وترجع تسميتها إلى الاقتصادي الامريكي **P.H. Douglas** والرياضي الامريكي **C. Cobb** حيث قاما في (1928) بتحليل دالة الانتاج معتمدين الصيغة أعلاه، وتعرف المعلمة ($•_0$) في هذه الصيغة بمعامل كفاءة الانتاج ، أما ($•_1$) فتمثل مرونة الانتاج بالنسبة إلى العمل و ($•_2$) ترمز لمرونة الانتاج بالنسبة إلى رأس المال الثابت، ومن أهم خواص دالة الانتاج المرقمة (51) هو ثبات مرونتي الانتاج بالنسبة إلى العمل ورأس المال الثابت، أي أنه إذا ازداد حجم الاستخدام في العمل بنسبة (1%) فإن الناتج (Y_i) يزداد بنسبة ($•_1$%) وذلك في حالة ثبات رأس المال ، وكذلك الحال اذا ازدادت قيمة رأس المال الثابت بنسبة (1%) فان الناتج يزداد بنسبة ($•_2$%) وذلك عند ثبات حجم العمل.

ويحتسب الميل الحدي للانتاج بالنسبة للعمل من صيغة كوب-دوكلاس للانتاج بالشكل التالي:

$$MP_L = \frac{\partial Y_i}{\partial L_i} = \beta_1 \beta_0 L_i^{\beta_1 - 1} K_i^{\beta_2} U_i$$

$$\therefore MP_L = \frac{\beta_1 \beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2} U_i}{L_i} = \beta_1 \frac{Y_i}{L_i}$$

أما مرونة الانتاج بالنسبة للعمل فتعطى بموجب الصيغة العامة التالية:

$$\eta_L = \frac{\Delta Y_i}{Y_i} \bigg/ \frac{\Delta L_i}{L_i} = \frac{\Delta Y_i}{\Delta L_i} . \frac{L_i}{Y_i}$$

وبما ان

$$\frac{\Delta Y_i}{\Delta L_i} = \frac{\partial Y_i}{\partial L_i}$$

وبالتعويض نحصل على

$$\eta_L = \beta_1 \frac{Y_i}{L_i} . \frac{L_i}{Y_i} = \beta_1$$

وبنفس الأسلوب اعلاه يمكن اشتقاق صيغة الميل الحدي للانتاج بالنسبة لرأس المال الثابت ، أي:

$$MP_K = \frac{\partial Y_i}{\partial K_i} = \beta_2 \beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2 - 1} U_i$$

$$\therefore MP_k = \frac{\beta_2 \beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2} U_i}{K_i} = \beta_2 \frac{Y_i}{K_i}$$

وبالتعويض في صيغة مرونة الانتاج بالنسبة لرأس المال الثابت نحصل على:

$$\eta_K = \frac{\Delta Y_i}{Y_i} \Big/ \frac{\Delta K_i}{K_i} = \frac{\Delta Y_i}{\Delta K_i} \cdot \frac{K_i}{Y_i}$$

حيث أن

$$\frac{\Delta Y_i}{\Delta K_i} = \frac{\partial Y_i}{\partial K_i}$$

$$\therefore \eta_K = \beta_2 \frac{Y_i}{K_i} \cdot \frac{K_i}{Y_i} = \beta_2$$

ومن خلال المرونة لعنصري الانتاج يمكن تمييز ثلاثة حالات لغلة الحجم أو عائد الانتاج للحجم وهي:

1- تناقص غلة الحجم **(Decreasing return scale)** وفيها $\beta_1 + \beta_2 < 1$

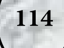
2- ثبات غلة الحجم **(Constant return scale)** وفيها $\beta_1 + \beta_2 = 1$

3- زيادة غلة الحجم **(Increasing return to scale)** وفيها $\beta_1 + \beta_2 > 1$

ولغرض توضيح الحالات الثلاثة ، نفرض بأن كل من العمل ورأس المال الثابت قد ازداد بنسبة (%•) أي أن:

$$\Delta L = L_i \cdot \frac{\alpha}{100}, \quad \Delta K = K_i \cdot \frac{\alpha}{100}$$

ومنه فإن القيم الجديدة لكل من العمل ورأس المال الثابت سوف تكون كالاتي:



$$L_i + \Delta L = L_i + L_i \frac{\alpha}{100} = L_i \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$$

$$K_i + \Delta K = K_i + K_i \frac{\alpha}{100} = K_i \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$$

وبالتعويض بصيغة كوب-دولاس للإنتاج المرقمة (31) نحصل على:

$$Y_i + \Delta Y = \beta_0 \left[L_i \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \right]^{\beta_1} \left[K_i \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \right]^{\beta_2} U_i$$

$$= \beta_0 \, L_{L_i}^{\beta_1} \; K_i^{\beta_2} \; U_i \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^{\beta_1} \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^{\beta_2}$$

$$\therefore Y_i + \Delta Y = Y_i \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^{\beta_1} \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^{\beta_2}$$

أو

$$Y_i + \Delta Y = Y_i \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^{\beta_1 + \beta_2}$$

النتيجة أعلاه تعني ، بأنه في حالة زيادة غلة الحجم فان الناتج ينمو بوتيرة اسرع من وتيرة نمو العمل ورأس المال ، بينما في حالة تناقص غلة الحجم فان الناتج ينمو بوتيرة أبطأ من وتيرة نمو العمل ورأس المال الثابت ، وأخيرا في حالة ثبات غله الحجم فإن الناتج ينمو بوتيرة نمو ثابتة وهي نفس وتيرة نمو العمل ورأس المال وفي ظل هذه الحالة والتي يكون فيها $\beta_1 + \beta_2 = 1$ يمكن تحويله دالة إنتاج كوب-دوكلاس المذكورة أعلاه إلى الشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 \, L_i^{\beta_1} \, K_i^{1-\beta_1} \, U_i$$

$$\therefore Y_i = \frac{\beta_0 \, L_i^{\beta_1} K_i \, U_i}{K_i^{\beta_1}}$$

وبالقسمة على رأس المال الثابت والتعديل نحصل على :

$$\frac{Y_i}{K_i} = \beta_0 \left(\frac{L_i}{K_i}\right)^{\beta_1} U_i$$

حيث ان :

($\bullet_1$) تمثل مرونة الانتاج بالنسبة للعمل ، اما مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال الثابت فيمكن الحصول عليها مباشرة من القيد المعطى $\bullet_2 = 1 - \bullet_1$ ، ومن المزايا الأساسية لدالة الإنتاج المعدلة اعلاه هو اختزال عدد المتغيرات المستقلة في دالة انتاج كوب ـ دوكلاس الى متغير مستقل واحد وهو (L_i / K_i) وبالتالي تلافي حدوث مشكلة التعدد الخطي (**Multiocollinearity**) في عملية التقدير والتي سوف نتناولها بشكل تفصيلي في الفصل الخامس من هذا الكتاب .

التحليل اعلاه أعتمد على أفتراض ان الانتاج يتحدد في ضوء العمل ورأس المال الثابت فقط ولكن في الواقع التطبيقي هناك عوامل اخرى تساهم في تحقيق نمو الانتاج ، وقد اطلق على مجمل تلك العوامل بالتطور التقني او التغير التكنولوجي(**Technical Change**) ، حيث يشمل هذا العامل الوصفي (**Qualitative Variable**) على كل ما يطرى من تغير تقني على وسائل

الانتاج وتحسين كفاءة الاداء واقتصاديات الحجم ورفع كفاءة قوة العمل والتي من شانها ان تؤدي الى زيادة مردود العملية الانتاجية عند استخدام نفس المستوى من العمل ورأس المال الثابت .

والتغير التكنولوجي اما ان يكون مضمنا في عناصر الانتاج ويحقق زيادة في الانتاج من خلال تحسين عناصر الانتاج او يكون غير مضمن في تلك العناصر . فالتغيير التكنولوجي المضمن في رأس المال هو ذلك التغير الذي يحقق زيادة في الانتاج عن طريق استخدام رأس مال متطور تكنولوجيا . اما التغير التكنولوجي المضمن في العمل فانه يحقق زيادة في الانتاج عن طريق تدريب العاملين ورفع مستوياتهم التعليمية وتغير تركيبهم من حيث العمر والجنس . ويقاس التغير التكنولوجي المضمن من خلال قياس التغيرات النوعية في العمل ورأس المال ، باستخدام بيانات عن الانفاق على البحث والتطوير والتدريب والتعليم وعن اعمار السلع الرأسمالية ... الخ .

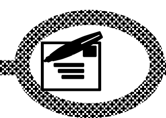
اما بالنسبة للتغير التكنولوجي غير المضمن فأنه ذلك الذي يؤدي الى زيادة كفاءة استخدام عناصر الانتاج فتتحقق زيادة في الانتاج عن طريق اعادة تنظيم العملية الانتاجية خلال فترة من الزمن ويقاس عن طريق اضافة متغير الزمن إلى دالة الانتاج رقم (27) المارة الذكر ، أي :

$$Y_i = f\,(L_i\,, K_i\,, T_i) \qquad (52)$$

حيث يمكن فرز أثر التغير التكنولوجي وذلك باضافة متغير الزمن (T_i) الى صيغة كوب ـ دوكلاس للانتاج في صورة اتجاه عام (**Time Trend**) وكالاتي :

$$Y_i = \beta_0 L_i^{\beta_1}\, K_i^{\beta_2}\, e^{CT_i}\, e^{U_i} \qquad (53)$$

وذلك على افتراض ان التغير التكنولوجي غير المضمن يتغير بنسبة ثابتة قدرها (c) وتمثل نسبة نمو الانتاج السنوي المتحقق بفضل التغير التكنولوجي الغير مضمن .



مثال تطبيقي(2)

الجدول التالي يبين قيمة الانتاج ورأس المال الثابت ومعدل عدد العاملين في المنشأة العامة لمنتوجات الالبان في العراق خلال الفترة **1969 / 1970 ـ 1980** .

<u>المطلوب</u> :

تقدير معالم دالة كوب ـ دوكلاس للانتاج التالية :

$$Y_t = \beta_0\, L_t^{\beta_1}\, K_t^{\beta_2}\, e^{U_t}$$

واحتساب كافة المؤشرات الممكن استخلاصها ، ثم بيان أثر التغير التكنولوجي الغير مضمن على نمو الانتاج في هذه المنشأة .

السنة (t)	قيمة الانتاج (Y_t) الف دينار	معدل عد العاملين (L_t)	رأس المال الثابت (K_t) الف دينار
1970/69	2467	1037	2553
1971/70	3326	1152	2900
1972/71	4331	1486	3653
1973/72	5025	1709	4293
1974/73	6778	1972	6462
1975/74	8423	2320	8674
1975	7501	2702	11497
1976	10896	2596	18621
1977	12911	2962	19317
1978	13979	3032	20757
1979	15491	3426	26726
1980	20658	4163	35590
	111786	28557	161043

الحل :

لغرض تقدير معالم صيغة كوب ـ دوكلاس للانتاج ، يستوجب اولا تحويلها الى الشكل الخطي وذلك يتم باخذ اللوغارتم لطرفيها وكالاتي :

$$\ln Y_t = \ln\beta_0 + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln K_t + U_i$$

بتطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) نحصل على تقدير لمعالم هذه الصيغة وبالشكل التالي :

$$b_{LS} = (X'X)^{-1} X' Y$$

او

$$\begin{bmatrix} \ln b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum \ln L_t & \sum \ln K_t \\ \sum \ln L_t & \sum (\ln L_t)^2 & \sum \ln L_t \ln K_t \\ \sum \ln K_t & \sum \ln K_t \ln L_t & \sum (\ln K_t)^2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} \sum \ln Y_t \\ \sum \ln Y_t \ln L_t \\ \sum \ln Y_t \ln K_t \end{bmatrix}$$

تقدير المعالم اعلاه يستوجب اخذ اللوغارتم لكل من المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة واجراء العمليات الحسابية التالية :

$$n = 12, \quad \sum \ln L_t = 92.3242, \quad \sum \ln K_t = 109.8918$$

$$\sum (\ln L_t)^2 = 712.3936, \quad \sum \ln L_t \ln K_t = 849.7543$$

$$\sum (\ln K_t)^2 = 1015.6044, \quad \sum \ln Y_t = 107.4901$$

$$\sum \ln Y_t \ln L_t = 830.0828, \quad \sum \ln Y_t \ln K_t = 990.8668$$

$$\therefore (X'X) = \begin{bmatrix} 12 & 92.3242 & 109.8918 \\ & 712.3936 & 849.7543 \\ & & 1015.6044 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 129.2481 & -34.7471 & 15.0877 \\ & 10.0527 & -4.6514 \\ & & 2.2602 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 107.4901 \\ 830.0828 \\ 990.8668 \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} \ln b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1168 \\ 0.7615 \\ 0.3511 \end{bmatrix}$$

والصيغة التقديرية لدالة كوب ـ دوكلاس للانتاج يمكن وضعها كالاتي :

$$\ln \hat{Y}_t = -0.1168 + 0.7615 \ln L_t + 0.3511 \ln K_t$$

أو

$$\hat{Y}_t = 0.8897 L_t^{0.7615} K_t^{0.3511}$$

$$R^2 = 0.98, \; F = 197.57, \; S_e^2 = 0.0117$$

$$Var \hat{=} Cov(b) = \begin{bmatrix} 1.517 & -0.408 & 0.177 \\ & 0.118 & -0.054 \\ & & 0.026 \end{bmatrix} = S_e^2 (X'X)^{-1}$$

$$MP_L = b_1 . \frac{\overline{Y}}{\overline{L}} = 2.98, \quad MP_K = b_2 . \frac{\overline{Y}}{\overline{K}} = 0.24$$

$$\eta_L = 0.7615, \quad \eta_K = 0.3511$$

يتضح من المعالم المقدرة لدالة الانتاج اعلاه ، بأن مرونة الانتاج بالنسبة للعمل تبلغ (0.76) أي ان زيادة ايام العمل بنسبة (100%) تؤدي الى زيادة الانتاج بنسبة (76%) . اما مرونة الانتاج بالنسبة لرأس المال فتبلغ (0.35) ، أي ان زيادة رأس المال الثابت بنسبة (100%) تؤدي الى زيادة الانتاج بنسبة (35%) .

اما بالنسبة لغلة الحجم (عائد الانتاج للحجم) فأن :

$$b_1 + b_2 = 1.1126$$

أي ان عائد الانتاج للحجم متزايد وهذا يعني ان زيادة كل من عنصري العمل ورأس المال بنسبة (100%) سوف يؤدي الى زيادة الانتاج بنسبة (111%) .

اما اثر التغير التكنولوجي الغير مضمن فيمكن قياسه وذلك باجراء التحويل اللوغارتمي لدالة الانتاج المرقمة (33) لتأخذ شكلها الخطي التالي :

$$\ln Y_t = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln L_t + \beta_2 \ln K_t + CT_t + U_t$$

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية ، نحصل على تقدير لمعالم هذه الصيغة وبالشكل الاتي:

$$b_{LS} = (X'X)^{-1} X'Y$$

أي أن :

$$\begin{bmatrix} \ln b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum \ln L_t & \sum \ln K_t & \sum T_t \\ \sum \ln L_t & \sum (\ln L_t)^2 & \sum \ln L_t \ln K_t & \sum T_t \ln L_t \\ \sum \ln K_t & \sum \ln L_t \ln K_t & \sum (\ln K_t)^2 & \sum T_t \ln K_t \\ \sum T_t & \sum T_t \ln L_t & \sum T_t \ln K_t & \sum T_t^2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} \sum \ln Y_t \\ \sum \ln Y_t \ln L_t \\ \sum \ln Y_t \ln K_t \\ \sum T_t \ln Y_t \end{bmatrix}$$

وبعد اجراء العمليات الحسابية اللازمة لعملية التقدير ، يمكن اعادة كتابة كل من مصفوفة $(X'X)$ وموجة $(X'Y)$ كالاتي :

$$(X'X)=\begin{bmatrix}12 & 92.3242 & 109.8918 & 78.0\\ & 712.3936 & 849.7543 & 617.0156\\ & & 1015.6045 & 750.3513\\ & & & 650.0\end{bmatrix}$$

$$X'Y=\begin{bmatrix}107.4901\\830.08178\\990.8668\\724.4115\end{bmatrix}$$

$$\therefore (X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}810.9296 & -76.5849 & -37.2654 & 18.41\\ & 12.6205 & -1.4382 & -1.1296\\ & & 6.2809 & -1.4135\\ & & & 0.4969\end{bmatrix}$$

$$\therefore \ln\hat{Y}_t = 3.383 + 0.547\ln L_t + 0.082\ln K_t + 0.094\,T_t$$

أو

$$\hat{Y}_t = 29.457\,L_t^{0.547}\,K_t^{0.082}\,e^{0.094\,T_t}$$

$$R^2 = .98,\ F = 144.92,\ S_e^2 = 0.0107$$

$$Var \hat{=} Cov = S_e^2(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}8.6879 & -0.8205 & -0.3992 & 0.197\\ & 0.1352 & -0.0154 & -0.0121\\ & & 0.0673 & -0.0151\\ & & & 0.005\end{bmatrix}$$

$$MP_L = b_1\frac{\overline{Y}}{\overline{L}} = 2.14,\quad MP_K = b_2\frac{\overline{Y}}{\overline{K}} = 0.057$$

$$\eta_L = 0.547,\qquad \eta_K = 0.082$$

ويتضح من معلمة (T_t) ان الانتاج في المنشأة العامة لمنتوجات الالبان قد حقق نموا قدره (9.4%) خلال الفترة المدروسة بفضل التغير التكنولوجي غير المضمن . ومن الجدير بالذكر ، اضافة المتغير التكنولوجي الى دالة الانتاج أدى الى انخفاض مرونة الانتاج بالنسبة الى العمل ورأس المال الثابت ، وهذا بدوره ادى الى انخفاض الميل الحدي للانتاج بالنسبة لكل من العمل ورأس المال واصبح عائد الانتاج للحجم في المنشأة متناقصا حيث ان :

$b_1+b_2=0.629$

والنتيجة اعلاه تشير الى ان زيادة نسبتها (100%) في عنصري العمل ورأس المال الثابت تؤدي الى زيادة الانتاج بنسبة (0.63%) فقط .

التماريـــــن

1 المتغير العشوائي (Y_i) يرتبط بالمتغير المستقل (X_i) وفقا للنموذج التالي :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 (2)^{X_i} + U_i$$

$$U_i \sim N(0, \sigma_u^2) \qquad E(U_i U_j) = 0 \quad \forall \quad i \neq j$$

فإذا اخذ كل من المتغير المعتمد والمتغير المستقل المشاهدات التالية :

$$Y_i = 7 , 5 , 12 , 16$$
$$X_i = 1 , 1 , 2 , 2$$

ضع هذه العلاقة بهيئة النموذج الخطي العام (GLM) وقدر موجه $\beta' = [\beta_0 \ \beta_1]$ ، ثم أوجد مصفوفة التباين والتباين المشترك لهذا الموجه .

2 للنموذج الخطي التالي :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + U_i$$
$$U_i \sim N(0 , 2.44) \quad , \quad E(U_i U_j) = 0 \quad \forall \quad i \neq j$$

اشتق صيغة لتباين الحد الثابت المقدر($var(b_o)$ ثم قدره من واقع البيانات التالية :

$$Var(b_1) = 1.24, \ Var(b_2) = 1.41, \ cov(b_1, b_2) = -1.28$$
$$\bar{X}_1 = 8, \ \bar{X}_2 = 4, \ n = 4$$

3 للنموذج الخطي العام التالي

$$Y = X\beta + U$$
$$E(U) = 0, E(U U') = \sigma_u^2 I_n$$

اثبت بان دالة الامكان الاعظم

$$MLE = (2\pi\sigma_u^2)^{-\frac{n}{2}} . e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2} U'U}$$

تعطي تقدير غير متحيز لموجة (•) وتقديرا متحيزا لتباين العينة ، ما هو مقدار هذا التحيز وكيف يتم معالجته .

4 باحث قدر معالم العلاقة الخطية بين المتغير العشوائي (Y_i) والمتغيرين المستقلين (X_1) و (X_2) مستخدما عينة ذات حجم (20) مشاهدة وكالاتي :

$$\hat{Y}_i = 6.96 + 0.335\,X_1 + 1.416\,X_2$$

وقد كانت العمليات الحسابية حول نقطة المتوسط كالاتي

$$\sum x_1^2 = 64106.67, \quad \sum x_2^2 = 297, \quad \sum y_i^2 = 12799.83$$
$$\sum y_i x_i = 22791.34, \quad \sum y_i x_2 = 725.4$$

اختبر مدى تأثير المتغير (X_1) على (Y_i) وكذلك (X_2) على (Y_i) .

5 البيانات التالية تمثل متوسط اتفاق الفرد العراقي (Y_t) ومتوسط دخله القابل للتصرف (X_{t1}) والرقم القياسي لاسعار المستهلك (X_{t2}) خلال الفترة (1964- 1980) والبيانات مقاسه بالدينار وبالاسعار الثابتة .

X_{t2}	X_{t1}	Y_t	السنة (t)
62.5	96.0	75.3	1964
62.1	103.4	85.0	65
63.4	106.4	87.97	66
65.5	105.7	82.0	67
66.9	107.4	85.9	68
70.7	101.8	81.4	69
73.8	97.3	81.5	1970
76.5	95.2	84.9	71
80.5	99.1	75.9	72
84.4	94.2	57.5	73
91.4	121.8	70.0	74
100.0	151.7	127.5	75
110.4	160.8	130.4	76
118.9	162.7	148.0	77
122.1	191.7	173.6	78
133.0	237.95	174.6	79
146.9	212.4	185.8	1980

المصدر : وزارة التخطيط ، الجهاز المركزي للاحصاء . بغداد – العراق.

أوجد ما يأتي:

1- قدر معالم دالة الاستهلاك الخطية التالية :

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + U_t$$

2- احسب مرونة الطلب الدخيلة ومرونة الطلب السعرية المباشرة .

3- قدر مرونة الطلب الدخيلة والمرونة السعرية المباشرة على افتراض ان دالة الاستهلاك تاخذ الصيغة التالية :

$$Y_t = \beta_0 X_{t1}^{\beta_1} X_{t2}^{\beta_2} U_t$$

4- قارن بين النتائج الحاصل عليها من الصيغتين اعلاه .

6 لنموذج الانحدار الخطي العام التالي :

$$Y = X\beta + U$$

$$U \sim N\left(0, \sigma_u^2 I_n\right), \quad E\left(U_i U_i\right) = 0 \qquad \forall i \neq j$$

أثبت أن مقدر (**OLS**) لموجه (•) غير متحيز ، ويتصف بخاصية أفضل تقدير خطي غير متحيز (**BLUE**).

7 اذا علمت أن الصيغة التقديرية لتباين العينة (S_e^2) تكتب بالشكل التالي :

$$E\left(S_e^2\right) = \frac{1}{n-k-1} E\left(e'e\right)$$

أثبت أن المقدر(S_e^2) لتباين العينة غير متحيز وبنفس الوقت متسق لتباين المجتمع σ_u^2

8 المتغير العشوائي (Y_i) يرتبط بالمتغير المستقل (X_i) وفق النموذج الخطي التالي :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

$$U_i \sim N\left(0, \sigma_u^2\right), \; E\left(U_i U_j\right) = 0 \qquad \forall \; i \neq j$$

$$Y_i = Y_1 \;,\; Y_2 \;,\; Y_3 \;,\; Y_4$$

$$X_i = 0 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; 1$$

ضع هذه الحالة بهيئة النموذج الخطي العام وأحسب مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجة (b_{LS}) مستخدما تباين عينـة مساويا الى $S_e^2 = 0.25$.

9 عينة عشوائية ذات حجم (12) أسرة

Yi= 100, 105, 108, 110, 120, 125, 128, 130, 135, 140, 145, 150.

Xi= 110, 115, 120, 130, 135, 140, 148, 150, 160, 165, 170, 175

حيث أن:

Yi تمثل أجمالي الاستهلاك الشهري بالدينار

Xi تمثل الدخل الشهري بالدينار

a- على فرض أن العلاقة بين **Yi** و **Xi** تأخذ الانحدار الخطي البسيط التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

قدره معالم النموذج أعلاه وبين فيما إذا كان النموذج المقدر ملائما أم لا

b- تنبأ بإجمالي الاستهلاك الشهري عندما يكون الدخل الشهري في المستوى التالي **X=200** ، ثم أوجد حدود الثقة للقيمة المتنبأ بها مستخدما مستوى ثقة **90 %**.

10 البيانات التالية تمثل الكميات المنتجة من سلعة معينة **(Yi)** خلال الفترة **1992-1998** وكالاتي:

السنوات	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
الانتاج	680	695	650	800	950	1100	135

1- قدر معالم العلاقة بين كميات الانتاج والزمن مفترضا

أن تكون هذه العلاقة خطية.

أن تكون هذه العلاقة أسية.

2- تنبأ بالكمية المنتجة في عام **2005**م ، وبين أي الافتراضين أكثر دقة.

11 البيانات أدناه مستقاة من عينة عشوائية ذات حجم **n=11** تمثل علاقة المتغير المعتمد **(Yi)** مع المتغيرين المستقلين **X2i, X1i** وكالاتي:

$$\mathbf{Y'Y = 289 \;,\; \sum_{i=1}^{n} Y_i = 33 \;,\; \sum_{i=1}^{n} X_{1i}\, Y_i = 85 \;,\; \sum_{i=1}^{n} X_{2i}\, Y_i = 142}$$

$$\mathbf{(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 4.3705 & 0.8495 & 0.4086 \\ & 0.1690 & 0.0822 \\ & & 0.0422 \end{bmatrix}}$$

أفترض أن النموذج الخطي العام هو:

$$\mathbf{Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + U_i}$$

$$\mathbf{U_i \sim N(0 \,,\, \sigma_u\, I_n) \;,\; E(U_i U_j) = 0 \quad \forall \quad i \neq j}$$

أوجد حدود الثقة إلى القيمة المتنبأ بها للمتغير المعتمد **(Yi)** عندما نأخذ المتغيرات المستقلة المستوى التالي:

X2=15 , X1=14

12 ما هو الفرق بين التنبؤ والتقدير ، اشتق صيغة تقديرية لتباين الظاهرة في حالة الاستقطاب الداخلي وفي حالة الاستقطاب الخارجي .

13 ما هو الاسلوب الملائم للتنبؤ في حالة أن تكون الظاهرة:

a- دالة سلوكية

b- دالة غير سلوكية

عزز جوابك بأمثلة.





مشكلة عدم تجانـــس التباين
The Problem of Heteroscadasticity

3.1 المقدمة

في دراستنا السابقة للنموذج الخطي البسيط (SLM) وللنموذج الخطي العام (GLM)، والتي اعتمد على طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) في تقدير المعالم، حيث اعتمد هذا الاسلوب في التقدير على فرضيات أساسية ، وعليه فإن دقة تقدير معالم النموذج في الواقع التطبيقي متوقف على مدى صحة هذه الفرضيات. فإذا كانت بعض الفرضيات غير دقيقة بالنسبة إلى واقع معين أصبح استخدام النموذج أمر غير منطقي ويؤدي إلى نتائج غير دقيقة، فعلى سبيل المثال ، احدى الفرضيات الاساسية التي أعتمد عليها في تقدير معالم النموذج الخطي البسيط هي فرضية تجانس تباين الخطأ التالية:

$$E\left(U_i^2\right)=\sigma_u^2$$

$$E\left(U_i U_j\right)=0 \quad \forall \quad i \neq j$$

والتي تم وضعها على شكل مصفوفات وموجهات في حالة النموذج الخطي العام

$$E\left(U\,U'\right)=\sigma_u^2\, I_n$$

بموجب هذه الفرضية يكون تباين الخطأ كالاتي

$$\sigma_{\mu_1}^2=\sigma_{\mu_2}^2=\sigma_{\mu_3}^2=\ldots=\sigma_{\mu_n}^2$$

وتعرف هذه الفرضية بفرضية تجانس تباين الخطأ (Homoscedasticity Assumption)، ولكن مثل هذا الافتراض قد لا يكون بالضرورة قائم على اسس موضوعية بالنسبة للمشكلة المدروسة. ففي معظم الدراسات القياسية وخاصة التي تعتمد منها على البيانات الاحصائية التي تاخذ شكل البيانات المقطعية (Cross-Section Data) فإن تشتت مشاهدات البيانات المقطعية الخاصة بالمتغير المعتمد قد يختلف اختلافا شديدا من مستوى إلى آخر من مستويات المتغيرات

المستقلة ، مثال ذلك دراسة دالة الاستهلاك التي تعتمد على دخل وإنفاق العوائل على مختلف السلع والخدمات فالعوائل ذات الدخول المرتفعة تتمتع بمرونة كبيرة في الانفاق أما انفاق العوائل ذات الدخول الواطئة فإنه يقع عادة ضمن حدود ضيقة ، وعليه فإن التباين عند قيم الدخول الكبيرة يكون أكبر من التباين عند قيم الدخول الصغيرة، وهكذا نجد بان فرضية تجانس تباين الخطأ تصبح عديمة الجدوى في مثل هذه الحالات ، وخرق الافتراض هذا يؤدي إلى حدوث مشكلة عدم تجانس التباين **(Heteroscedasticity problem)**.

3.2 تحليل عدم تجانس التباين

بشكل عام تواجه مشكلة عدم تجانس التباين في حالة تقدير معالم النماذج المعتمدة على بيانات مقطعية ، حيث يكون هناك تفاوت كبير في قيمها كما هو الحال في بيانات بحوث الاسرة التي تضم اسرا متباينة بشكل كبير في مستويات دخولها، وكذلك في البيانات الخاصة بمؤسسات أو مناطق ، حيث يكون هناك تباين بدرجة كبيرة في قيم متغيراتها وكنتيجة لذلك فإن فرضية التجانس الانفة الذكر تأخذ الشكل التالي:-

$$\mathbf{E\left(U_i^2\right)=\sigma_{u_i}^2}$$

$$\mathbf{E\left(U_iU_j\right)=0 \qquad \forall \qquad i\neq j}$$

وفي حالة النموذج الخطي العام يأخذ الفرض أعلاه الشكل التالي:

$$E\left(UU'\right)=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1$$

حيث أن

$$\mathbf{\sigma_{u_1}^2 \neq \sigma_{u_2}^2 \neq \sigma_{u_3}^2 \neq \ldots \neq \sigma_{u_n}^2}$$

في ظل فرضية عدم تجانس التباين أعلاه ، يكون استخدام طريقة **(OLS)** لتقدير معالم النموذج غير مجدي، حيث أن المعالم المقدرة بمثل هذا الأسلوب سوف لن تكون أفضل تقدير خطي غير متحيز **(BLUE)** ، بعبارة أخرى لا تمتلك المعالم المقدرة بهذا الأسلوب خاصية أقل تباين ممكن.

ولإثبات ذلك ، دعنا أن نفترض وجود تقدير آخر للميل الحدي في النموذج الخطي البسيط وليكن $\left(\tilde{\beta}_1\right)$.

$$\therefore \tilde{\beta}_1 = \sum a_i\ Y_i \quad \text{.......... (2)}$$

$$E\left(\tilde{\beta}_1\right) = E\left(\sum a_i\ Y_i\right) = \sum a_i E\left(Y_i\right) = \sum a_i\left(\beta_0 + \beta_1 X_i\right) \quad \text{.......... (3)}$$

ولكي تكون $\left(\tilde{\beta}_1\right)$ تقدير غير متحيز لـ $\left(\beta_1\right)$ في العلاقة (3) أعلاه يشترط أن يكون :

$$\sum a_i = 0 \quad , \quad \sum a_i\ X_i = 1$$

أما تباين $\left(\tilde{\beta}_1\right)$ فيعطى بالشكل التالي:

$$Var\left(\tilde{\beta}_1\right) = Var\left(\sum a_i X_i\right) \quad \text{.......... (4)}$$

$$= E\left[\sum a_i\ Y_i - E\left(\sum a_i\ Y_i\right)\right]^2$$

$$= E\left[\sum a_i\left(Y_i - E\left(Y_i\right)\right)\right]^2$$

$$= E\left(\sum a_i\ U_i\right)^2$$

$$= E\left(\sum a_i^2 U_i^2\right) + 2E\left(\sum_{i<j} a_i\ a_j U_i\ U_j\right)$$

$$= \sum a_i^2\ E\left(U_i^2\right) + 2\sum_{i<j} a_i\ a_j\ E\left(U_i\ U_j\right)$$

وبما أن:

$$E\left(U_i^2\right) = \sigma_{u_i}^2 \quad , \quad E\left(U_i\ U_j\right) = 0$$

$$\therefore Var\left(\tilde{\beta}_1\right) = \sum a_i^2\ \sigma_{u_i}^2 \quad \text{.......... (5)}$$

وباستخدام مضاعف لاكرانج **(Langrange Multiplier)** لإيجاد قيم (a_i) والتي تجعل العلاقة رقم (5) أقل ما يمكن وبنفس الوقت تحقق الشرطين الانفين الذكر.

$$h = \sum a_i^2 \sigma_{u_i}^2 - \lambda_1 \sum a_i - \lambda_2\left(\sum a_i\ X_i - 1\right) \quad \text{.......... (6)}$$

وبمفاضلة العلاقة أعلاه لكل من قيم $\left(a_1\ ,\ a_2\ ,\ ...,\ a_n\right)$ و λ_1 و λ_2 نحصل على:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial a_1} &= 2a_1\ \sigma_{u_1}^2 - \lambda_1 - \lambda_2\ X_1 \\
\frac{\partial h}{\partial a_2} &= 2a_2\ \sigma_{u_2}^2 - \lambda_1 - \lambda_2\ X_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \\
\frac{\partial h}{\partial a_n} &= 2a_n\ \sigma_{u_1}^2 - \lambda_1 - \lambda_2\ X_n
\end{aligned}\right\} \quad \text{.......... (7)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda_1} = -\sum a_i \quad \text{.......} (8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda_2} = -\left(\sum a_i X_i - 1\right) \quad \text{.......} (9)$$

العلاقات أعلاه عددها (n+2) ، وبمساواتها للصفر نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} 2a_1 \sigma^2_{u_1} - \lambda_1 - \lambda_2 X_1 = 0 \\ 2a_2 \sigma^2_{u_2} - \lambda_1 - \lambda_2 X_2 = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 2a_n \sigma^2_{u_1} - \lambda_1 - \lambda_2 X_n = 0 \end{array}\right\} \quad \text{.......} (10)$$

$$-\sum a_i = 0 \quad \text{.......} (11)$$

$$-\sum a_i X_i + 1 = 0 \quad \text{.......} (12)$$

وبالتعديل نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2\sigma^2_{u_1}}\left(\lambda_1 + \lambda_2 X_1\right) \\ a_2 = \frac{1}{2\sigma^2_{u_2}}\left(\lambda_1 + \lambda_2 X_2\right) \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_n = \frac{1}{2\sigma^2_{u_n}}\left(\lambda_1 + \lambda_2 X_n\right) \end{array}\right\} \quad \text{.......} (13)$$

وبوضع $w_i = \frac{1}{\sigma^2_{u_i}}$ نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2} w_1 \left(\lambda_1 + \lambda_2 X_1\right) \\ a_2 = \frac{1}{2} w_2 \left(\lambda_1 + \lambda_2 X_2\right) \\ \vdots \qquad \qquad \vdots \\ a_n = \frac{1}{2} w_n \left(\lambda_1 + \lambda_2 X_n\right) \end{array}\right\} \quad \text{.......} (14)$$

أو

$$\sum a_i = \frac{1}{2} \sum w_i \left(\lambda_1 + \lambda_2 X_i\right)$$

$$\therefore \sum a_i = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \sum w_i + \lambda_2 \sum w_i X_i\right) \quad \text{.......} (15)$$

وبضرب كل معادلة من مجموعة المعادلات رقم (14) بـ (X_i) حيث $(i=1,2,...,n)$ ثم جمع النتائج نحصل على:

$$\sum a_i X_i = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \sum w_i X_i + \lambda_2 \sum w_i X_i^2\right) \quad \text{......(16)}$$

وبما أن

$$\sum a_i = 0 \quad , \quad \sum a_i X_i = 1$$

بالتعويض نحصل على:

$$0 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \sum w_i + \lambda_2 \sum w_i X_i\right) \quad \text{......(17)}$$

$$1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \sum w_i X_i + \lambda_2 \sum w_i X_i^2\right) \quad \text{......(18)}$$

وبحل العلاقتين أعلاه حلا آنيا نحصل على قيمتي (λ_1) و (λ_2) كالاتي:

$$\lambda_1 = \frac{-2\sum w_i X_i}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right) - \left(\sum w_i X_i\right)^2} \quad \text{......(19)}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\sum w_i}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right) - \left(\sum w_i X_i\right)^2} \quad \text{......(20)}$$

وبتعويض قيمة (λ_1) و (λ_2) في أي معادلة من معادلات المجموعة رقم (14) نحصل على قيمة (a_i) ، علما بـان الشـكل العام لمعادلات هذه المجموعة هو

$$a_i = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 w_i + \lambda_2 w_i X_i\right)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

$$\therefore a_i = \frac{-w_i \sum w_i X_i + w_i X_i \sum w_i}{\sum w_i \sum w_i X_i^2 - \left(\sum w_i X_i\right)^2} \quad \text{......(21)}$$

المقدار أعلاه لـ (a_i) هو الذي يصغر تباين $(\tilde{\beta}_1)$ نحصل على:

$$\tilde{\beta}_i = \frac{\sum w_i \sum w_i X_i Y_i - \sum w_i X_i \sum w_i Y_i}{\sum w_i \sum w_i X_i^2 - \left(\sum w_i X_i\right)^2} \quad \text{......(22)}$$

يتضح من الصيغة (22) ، أن قيمة $\left(\tilde{\beta}_1\right)$ تختلف عن قيمة $\left(\beta_1\right)$ المقدرة بطريقة (OLS) ، وأن تباينها في هذه الحالة يحسب كالآتي:

$$Var = \left(\tilde{\beta}_1\right) = \sum a_i^2 \, \sigma_{u_i}^2$$

وبالتعويض عن قيمة $\left(a_i^2\right)$ علما بأن $\sigma_{u_i}^2 = \sigma_u^2 / w_i$ نحصل على الاتي:

$$Var\left(\tilde{\beta}_1\right) = \frac{\sum w_i}{\sum w_i \sum w_i X_i^2 - \left(\sum w_i X_i\right)^2} \quad \text{......(23)}$$

وبنفس الاسلوب أعلاه ، يمكن اثبات صيغة وتباين الحد الثابت في ظل فرضية عدم تجانس التباين يعطى كالاتي:

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{\sum w_i Y_i}{\sum w_i} - \tilde{\beta}_1 \frac{\sum w_i X_i}{w_i}$$

$$\therefore \tilde{\beta}_0 = \frac{\left(\sum X_i^2 w_i\right)\left(\sum w_i Y_i\right) - \left(\sum w_i X_i\right)\left(\sum X_i w_i Y_i\right)}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right) - \left(\sum w_i X_i\right)^2} \quad \text{......(24)}$$

وتباينه يعطى بالصيغة التالية:

$$Var\left(\tilde{\beta}_0\right) = \frac{\sum w_i X_i^2}{\sum w_i \sum w_i X_i^2 - \left(\sum w_i X_i\right)^2} \quad \text{......(25)}$$

يتضح من أعلاه بأن تقديرات المربعات الصغرى الاعتيادية لا تتمتع بخاصية أفضل تقدير خطي غير متحيز (BLUE) في ظل فرضية عدم تجانس تباين الخطأ ، حيث أن الفرق الوحيد بين قيم الحد الثابت والميل الحدي المقدرة للنموذج الخطي البسيط في ظل فرضية التجانس وعدم التجانس هو المقدار $\left(\sqrt{w_i}\right)$ ويترتب على ذلك ما يأتي:

$$E\left(U_i^2\right) = \sigma_{u_i}^2 = \frac{\sigma_u^2}{w_i} = \sigma_u^2 W \quad \text{......(26)}$$

حيث أن $W = \dfrac{1}{w_i}$

الفرض أعلاه يعتبر الاساس في اتباع طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) ، علـما بـأن $E\left(S_e^2\right)=\sigma_u^2$ يمثـل تباين العينة ، أما (w_i) فما هي إلا عبارة عـن أوزان (weights) وبمعرفتهـا تكـون مسـألة التقـدير والاختبـار والتنبـؤ بسـيطة وممكنة، فعلى سبيل المثال ولنموذج خطي بسيط

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

ففي ظل فرضية عدم التجانس ، يستوجب ضرب طرفي النموذج بالمقدار $\sqrt{w_i}$ وكالاتي:

$$\therefore \sqrt{w_i}\, Y_i = \beta_0 \sqrt{w_i} + \beta_1 \sqrt{w_i}\, X_i + \sqrt{w_i}\, U_i \quad \ldots\ldots (27)$$

يتضح من النموذج أعلاه ، انه لا يتضمن تقاطع (intercept) حيث أصبح متضمنا متغيرين مسـتقلين الاول يتمثـل بـ $\left(\sqrt{w_i}\right)$ والثاني بـ $\left(\sqrt{w_i}\, X_i\right)$، أما المتغير المعتمد فيتمثل بالحد $\left(\sqrt{w_i}\, Y_i\right)$. مثل هـذا الاجـراء يعنـي اسـتبعاد أثـر عدم التجانس من النموذج الخطي البسيط وبالتالي يمكن تقدير معالمه أما بتطبيق طريقة (OLS) عـلى متغـيرات النمـوذج التي تم استبعاد أثر عدم التجانس منها أو بإتباع أسلوب المربعات الصغرى الموزونة (WLS) وذلك بتطبيق الصيغ رقـم (22) و(24) الانفة الذكر .

وتجدر الاشارة هنا إلى ان الخطأ العشوائي في النموذج أعلاه يأخذ الشكل التالي:

$$E\left(\sqrt{w_i}\, U_i\right)^2 = w_i\, E\left(U_i^2\right)$$

$$= w_i \sigma_{u_i}^2 = w_i \frac{\sigma_u^2}{w_i} = \sigma_u^2$$

وعليه يمكن اعادة كتابة النموذج رقم (27) أعلاه باستخدام المصفوفات والموجهات بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1_n & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

3.3 تقديرات المربعات الصغرى الموزونة

في حالة النموذج الخطي العام ، يمكن إعادة كتابة النموذج رقم (27) باستخدام المصفوفات كالاتي:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{w_1}Y_1 \\ \sqrt{w_2}Y_2 \\ \vdots \\ \sqrt{w_n}Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & \sqrt{w_1}X_{12} & \cdots & \sqrt{w_1}X_{1k} \\ \sqrt{w_2} & \sqrt{w_2}X_{22} & \cdots & \sqrt{w_1}X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{w_n} & \sqrt{w_n}X_{n2} & \cdots & \sqrt{w_n}X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{w_1}U_1 \\ \sqrt{w_2}U_2 \\ \vdots \\ \sqrt{w_2}U_n \end{bmatrix}$$

حيث يمكن التعبير عن ذلك بشكل أكثر اختصارا وكالاتي:

$$P^{-1}Y = P^{-1}X\beta + P^{-1}U \quad \text{......} (28)$$

حيث أن

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{w_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{w_2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{w_n}} \end{bmatrix}$$

ومنه يمكن الحصول على:

$$P\,P' = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix} = W$$

$$\therefore W^{-1} = (PP')^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$$

النموذج الخطي العام المرقم (28) أعلاه ، الان في حالة يحقق الفروض الاساسية اللازمة لتطبيق أسلوب المربعات الصغرى وذلك لان :

$$E(U_* U_*') = E\left[(P^{-1}\,U)(P^{-1}U)'\right]$$

$$= E(P^{-1}\,U\,U'P'^{-1})$$

$$= P^{-1}\,E(U\,U')P'^{-1}$$

$$= P^{-1}\,\sigma_u^2\,W\,P'^{-1}$$

$$= \sigma_u^2 P^{-1}\,P\,P'\,P'^{-1}$$

$$E(U_* U_*') = \sigma_u^2\,I_n\,I_n = \sigma_u^2\,I_n$$

النتيجة أعلاه تعكس تحقق فرضيتي تجانس تباين الخطأ وأنعدام وجود الارتباط الذاتي (التباين المشترك) ، وعليه فإن الفرضيات الاساسية الخاصة بنموذج الانحدار متحققة، وبالتالي يمكن اتباع اسلوب المربعات الصغرى لتقدير موجه المعالم في النموذج رقم (28) وكالاتي:

$$P^{-1}Y = P^{-1}\,X\beta + P^{-1}\,U$$

$$\therefore P^{-1}U = P^{-1}\,Y - P^{-1}\,X\beta$$

$$(P^{-1}U)'\,(P^{-1}U) = (P^{-1}Y - P^{-1}\,X\beta)'\,(P^{-1}\,Y - P^{-1}\,X\beta)$$

$$= (Y'P'^{-1} - \beta'X'P'^{-1})(P^{-1}Y - P^{-1}\,X\beta)$$

$$\therefore (U'P'^{-1}P^{-1}U) = Y'\,P'^{-1}P^{-1}Y - Y'P'^{-1}P^{-1}X\beta - \beta'X'P'^{-1}P^{-1}Y + \beta'X'P'^{-1}P^{-1}\,X\beta$$

$$\left(U'W^{-1}U\right) = Y'W^{-1}Y - Y'W^{-1}X\beta - \beta'X'W^{-1}Y + \beta'X'W^{-1}X\beta$$

$$= Y'W^{-1}Y - 2\beta'X'W^{-1}Y + \beta'X'W^{-1}X\beta$$

وبأخذ التفاضل الجزئي الاول نسبة إلى موجه (β') نحصل على:

$$\frac{\partial\left(UW^{-1}U\right)}{\partial\beta'} = -2X'W^{-1}Y + 2X'W^{-1}X\,b_{WLS} = 0$$

$$\therefore X'W^{-1}Y = X'W^{-1}X\,b_{WLS}$$

$$\therefore b_{WLS} = \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}Y$$

والصيغة أعلاه تعطي أفضل تقدير خطي غير متحيز لموجه (•) في حالة عدم تجانس التباين، حيث يمكن اثبات ذلك باتباع نفس الاسلوب المذكور في الفصل الثاني وتعرف هذه الصيغة بتقدير اتيكن **(Atken Estimator)** ويسمى هذا الاسلوب في التقدير بطريقة المربعات الصغرى الموزونة **(Weighted Least Squares)** **(WLS)** . ولكون هذا الاسلوب يعتمد اساسا على الاوزان (w_i) ، لذا يطلق عليه احيانا تسمية تقديرات المربعات الصغرى المرجحة **(Weighted Least Square)** **(WLS)**.

$$b_{WLS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}\left(X\beta + U\right)$$

$$b_{WLS} = \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}X\beta + \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}U$$

$$\therefore b_{WLS} = \beta + \left(X'W^{-1}X\right)X'W^{-1}U$$

وبما ان **E(U)=0**

$$\therefore E\left(b\right)_{WLS} = \beta$$

أما مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعالم الموجه المقدر ، فيمكن الوصول اليها بالشكل التالي:

$$b_{WLS} - \beta = \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}U$$

$$Var - Cov\left(b\right)_{WLS} = Var - Cov\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}_{WLS} = E\left[\left(b-\beta\right)\left(b-\beta\right)'\right]$$

$$\text{Var}-\text{Cov}(b)_{WLS} = E\left(\left[\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}U\right]\left[\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}U\right]'\right)$$

$$= E\left(\left[\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}\ X'W^{-1}U\right]\left[U'W^{-1}X\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}\right]\right)$$

$$= \left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}E(UU')W^{-1}X\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}$$

$$= \sigma_u^2\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}WW^{-1}X\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}$$

$$= \sigma_u^2\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}X\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}$$

$$= \sigma_u^2\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}$$

والصيغة اعلاه تعطي التباين والتباين المشترك لموجه (b_{WLS}) المتضمن معالم النموذج الخطي المدروس في حالة عدم تجانس التباين ، حيث أن تباين العينة $\left(S_e^2\right)$ يمكن تقديره بالشكل التالي:

$$E\left(S_e^2\right)=\frac{1}{n-k-1}E\left(e'_* \; e_*\right)$$

$$=\frac{1}{n-k-1}\left(P^{-1}Y-P^{-1}Xb\right)'\left(P^{-1}Y-P^{-1}Xb\right)$$

$$\therefore S_e^2=\frac{1}{n-k-1}\left(Y'P'^{-1}-b'X'P'^{-1}\right)\left(P^{-1}Y-P^{-1}Xb\right)$$

$$=\frac{1}{n-k-1}\left(y-b\,X\right)P'^{-1}P^{-1}\left(Y-X_b\right)$$

$$=\frac{1}{n-k-1}e'\,W^{-1}e$$

$$\therefore S_e^2=-\frac{e'\,W^{-1}e}{n-k-1}$$

حيث أن

n : تمثل حجم العينة.

k : تمثل عدد المتغيرات المستقلة . ويمكن وضع صيغة أكثر ملائمة في الحساب لتقدير تباين العينة وبالشكل التالي:

$$e'W^{-1}e=\left(Y-Xb\right)'W^{-1}\left(Y-Xb\right)$$

$$=\left(Y'-b'X'\right)W^{-1}\left(Y-Xb\right)$$

$$=Y'W^{-1}Y-Y'W^{-1}Xb-b'X'W^{-1}Y+b'X'W^{-1}Xb$$

$$e'W^{-1}e=Y'W^{-1}Y-Y'W^{-1}Xb-b'X'W^{-1}Y+b'X'W^{-1}X\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}X'W^{-1}Y$$

$$=Y'W^{-1}Y-b'X'W^{-1}y$$

$$\therefore S_e^2=\frac{Y'W^{-1}Y-b'X'W^{-1}Y}{n-k-1}$$

3.4 مقارنة بين طريقة (OLS) و (WLS) - كفاءة التقدير

لغرض مقارنة التقديرات الحاصل عليها من جراء تطبيق المربعات الصغرى الموزونة (WLS) ، بعبارة اخرى تطبيق اسلوب (WLS) في ظل الافتراض التالي:

$$E(UU') = \sigma_u^2 W$$

وبالتالي مقارنة مثل هذه التقديرات ، عند تطيق اسلوب (OLS) في ظل نفس الافتراض أعلاه. ولغرض السهولة سوف ناخذ نموذج بسيط أي علاقة متغير معتمد بمتغير مستقل واحد، وبالتالي تعميم ذلك لاكثر من متغير مستقل.

في ظل افتراض عدم تجانس تباين الخطأ أعلاه ، يمكن تقدير معالم النموذج الخطي البسيط كالاتي:

$$b_{WLS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{WLS} = \left(X'W^{-1}X\right)^{-1} X'W^{-1}Y$$

حيث أن

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{WLS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{WLS} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1_n \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1_n & X_n \end{bmatrix} \right)^{-1} .$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1_n \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{WLS}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{WLS} = \left(\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \\ X_1w_1 & X_2w_2 & \cdots & X_nw_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ I_n & X_n \end{bmatrix}\right)^{-1} .$$

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \\ X_1w_1 & X_2w_2 & \cdots & X_nw_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$b_{WLS} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i & \sum_{i=1}^{n} X_i w_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 w_i \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i W_i Y_i \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{WLS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{WLS} = \frac{\begin{bmatrix} \sum w_i X_i^2 & -\sum X_i w_i \\ -\sum w_i w_i & \sum w_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum w_i Y_i \\ \sum X_i w_i Y_i \end{bmatrix}}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right) - \left(\sum X_i w_i\right)^2}$$

$$\therefore b_0 = \frac{\left(\sum w_i X_i^2\right)\left(\sum w_i Y_i\right) - \left(\sum w_i X_i\right)\left(\sum X_i w_i Y_i\right)}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right) - \left(\sum X_i w_i\right)^2} \quad \text{.........................} (29)$$

$$b_1 = \frac{\left(\sum w_i\right)\left(\sum X_i w_i Y_i\right) - \left(\sum X_i w_i\right)\left(\sum w_i Y_i\right)}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right) - \left(\sum X_i w_i\right)^2} \quad \text{.........................} (30)$$

تجدر الاشارة هنا إلى أن الصيغتين أعلاه رقم (29) و (30) مطابقة تماما للصيغتين رقم (22) و (24) الواردة في الجزء (2-3) من هذا الفصل أما مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعلم النموذج الخطي البسيط فتحسب بموجب الصيغة التالية:

$$Var \hat{-} Cov\left(\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}\right)_{WLS} = S_e^2 \left(X' W^{-1} X\right)^{-1}$$

$$= S_e^2 \begin{bmatrix} \sum w_i & \sum X_i w_i \\ \sum w_i X_i & \sum X_i^2 w_i \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\therefore Var \hat{-} Cov(b) = \frac{S_e^2 \begin{bmatrix} \sum w_i X_i^2 & -\sum X_i w_i \\ -\sum w_i X_i & \sum w_i \end{bmatrix}}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right) - \left(\sum X_i w_i\right)^2}$$

$$\therefore Var(b_0)=\frac{S_e^2\sum w_i X_i^2}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right)-\left(\sum X_i w_i\right)^2} \qquad (31)$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_1)=\frac{S_e^2\sum w_i}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right)-\left(\sum X_i w_i\right)^2} \qquad (32)$$

أما إذا طبقنا أسلوب المربعات الصغرى مباشرة لتقدير معالم هـذا النمـوذج الخطـي البسـيط والتـي مشـاهدات متغيراته تتصف بصفة عدم التجانس ، فإن الصيغة التقديرية لتباين المعالم سوف تأخذ الشكل التالي:

$$b_{LS}=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{LS}=(X'X)^{-1}X'Y=(X'X)^{-1}X'[X\beta+U]$$

وبما ان $b-\beta-(X'X)^{-1}X'U$ ، بالتعويض في الصيغة العامة لتباين المعالم

$$\therefore Var-Cov(b)=E\left[(b-\beta)(b-\beta)'\right]$$

$$=E\left(\left[(X'X)^{-1}X'U\right]\left[(X'X)^{-1}X'U\right]'\right)$$

$$=(X'X)^{-1}X'E(UU')X(X'X)^{-1}$$

$$\therefore Var-Cov(b)=\sigma_u^2(X'X)^{-1}X'WX(X'X)^{-1} \qquad (33)$$

حيث أن

$$E\left(S_e^2\right)=\sigma_u^2$$

وبالتطبيق على مثالنا السابق نحصل على:

$$Var\hat{-}Cov(b)_{LS}=Var\hat{-}Cov\left(\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{LS}\right)S_e^2(X'X)^{-1}X'WX(X'X)^{-1}$$

$$\therefore Var\hat{-}Cov(b)=S_e^2\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1_n \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1_n & X_n \end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1_n \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1_n & X_n \end{bmatrix}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1_n \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1_n & X_n \end{vmatrix}\right)^{-1}$$

$$\therefore \text{Car} \hat{=} \text{Cov}(b)_{LS} = S_e^2 \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum 1/w_i & \sum X_i/w_i \\ \sum X_i/w_i & \sum X_i^2/w_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{S_e^2 \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum 1/w_i & \sum X_i/w_i \\ \sum X_i/w_i & \sum X_i^2/w_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{bmatrix}}{\left[n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i^2\right)\right]^2}$$

$$= \frac{S_e^2 \begin{bmatrix} \left(\sum X_i^2\right)\left(\sum 1/w_i\right) - \left(\sum X_i\right)\left(\sum X_i/w_i\right) & \left(\sum X_i^2\right)\left(\sum X_i/w_i\right) - \left(\sum X_i\right)\left(\sum X_i^2/w_i\right) \\ -\left(\sum X_i\right)\left(\sum 1/w_i\right) + n\left(\sum X_i/w_i\right) & -\left(\sum X_i\right)\left(\sum X_i/w_i\right) + n\left(\sum X_i^2/w_i\right) \end{bmatrix}}{\left[n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i^2\right)\right]^2} \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{bmatrix}$$

$$\hat{Var}(b_0) = \frac{S_e^2 \left[\left(\sum X_i^2\right)^2 \left(\sum 1/w_i\right) - 2\left(\sum X_i^2\right)\left(\sum X_i\right)\left(\sum X_i/w_i\right) + \left(\sum X_i\right)^2 \left(\sum X_i^2/w_i\right)\right]}{\left[n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2\right]^2} \quad \text{.........(34)}$$

$$\hat{Var}(b_1) = \frac{S_e^2 \left[\left(\sum X_i\right)^2 \left(\sum 1/w_i\right) - 2n\left(\sum X_i\right)\left(\sum X_i/w_i\right) + n^2 \left(\sum X_i^2/w_i\right)\right]}{\left[n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2\right]^2} \quad \text{.............................. (35)}$$

الصيغتين أعلاه رقم (34) و (35) تبين تباين كل من الحد الثابت (b_0) والميل الحدي (b_1) للنموذج الخطي البسيط في حالة استخدام طريقة (OLS) في التقدير ، علما بأن مشاهدات كل من المتغيرالمعتمد والمتغير المستقل تخضع لفرض عدم تجانس التباين في حين الصيغتين رقم (31) و (32) تبين تباين كل من الحد الثابت والميل الحدي في حالة استخدام طريقة (WLS) في التقدير لمعالم النموذج الخطي البسيط.

تجدر الاشارة هنا ، وبعد توفر مثل هذه التقديرات لتباين المعالم ، يمكن حساب كفاءة تقدير المربعات الصغرى الموزونة (WLS) نسبة إلى تقديرات المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) فعلى سبيل المثال ، كفاءة التقدير بالنسبة إلى الحد الثابت (b_0) تحسب بموجب الصيغة التالية:

$$\text{efficiency of } (b_0) = \frac{\text{Var}(b_0) \text{ in WLS}}{\text{var}(b_0) \text{ in OLS}}$$

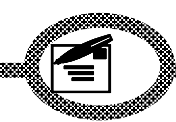
أي تباين الحد الثابت المقدر بطريقة (WLS) منسوبا إلى تباين الحد الثابت المقدر بطريقة (OLS) في ظل فرضية عدم تجانس التباين.

ونفس الشئ يمكن ان يقال بالنسبة إلى كفاءة تقدير الميل الحدي (b_1).

$$\text{efficiency of } (b_1) = \frac{Var(b_1) \text{ in WLS}}{Var(b_1) \text{ in OLS}}$$

يتضح من أعلاه ، اذا كانت نتيجة المقارنة مساوية إلى الواحد الصحيح ، دل ذلك على تساوي كفاءة الطريقتين في التقدير ، أما إذا كانت النتيجة أقل من واحد صحيح فهذا يعني بأن التقدير بموجب (WLS) أكثر كفاءة من التقدير باستخدام (OLS) ، أي ان

$$eff(b_j) = \frac{Var(b_j) \text{ in WLS}}{Var(b_j) \text{ in OLS}} < 1$$



مثال تطبيقي(1)

نفرض بأن قيم المتغير المستقل في مثالنا المذكور أعلاه قد أخذ المشاهدات التالية:

X_i=2, 3, 5, 7, 9

ولنفرض كذلك بأن تباين الخطأ يتناسب طرديا مع مربع قيم (X_i) أي ان:

$$E(U_i^2) = \sigma_u^2 X_i^2$$

لإيجاد كفاءة التقدير ، يستوجب مقارنة هذا الافتراض مع عناصر مصفوفة (W) السابقة الذكر.

لدينا

$$X_i^2 = \frac{1}{w_i}$$

$$\therefore w_i = \frac{1}{X_i^2}$$

وبالتعويض عن قيمة (w_i) في صيغة تباين الميل الحدي المقدر بطريقة (WLS) وكذلك في صيغة تباين الحد الثابت نحصل على:

$$V\hat{a}r(b_1) = \frac{S_e^2 \sum(1/X_i^2)}{\sum(1/X_i^2)(n) - [\sum(1/X_i)]^2}$$

$$V\hat{a}r(b_0) = \frac{n S_e^2}{\sum(1/X_i^2)(n) - [\sum(1/X_i)]^2}$$

وكذلك بالتعويض عن قيمة (w_i) في صيغة تباين الميل الحدي المقدر بطريقة (OLS) وصيغة تباين الحد الثابت المقدر بطريقة (OLS) آخذين بنظر الاعتبار احتساب التباين لهاتين المعلمتين في ظل افتراض عدم تجانس التباين.

$$V\hat{a}r(b_1) = \frac{S_e^2\left[\left(\sum X_i\right)^2\left(\sum X_i^2\right) - 2n\left(\sum X_i\right)\left(\sum X_i^3\right) + n^2\left(\sum X_i^4\right)\right]}{\left[n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2\right]^2}$$

وأن

$$V\hat{a}r(b_0) = \frac{S_e^2\left[\left(\sum X_i^2\right)^2\left(\sum X_i^2\right) - 2\left(\sum X_i^2\right)\left(\sum X_i\right)\left(\sum X_i^3\right) + \left(\sum X_i\right)^2\left(\sum X_i^4\right)\right]}{\left[n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2\right]^2}$$

تطبيق الصيغ الاربعة أعلاه يستوجب اجراء العمليات الحسابية التالية:

X_i	$1/X_i$	$1/X_i^2$	X_i^2	X_i^3	X_i^4
2	0.5	0.25	4	8	16
3	0.33	0.11	9	27	81
5	0.20	0.04	25	125	625
7	0.14	0.02	49	343	2401
9	0.11	0.01	81	729	6561
26	1.28	0.43	168	1232	9684

ومنه يمكن الحصول على تقدير لتباين المعالم في حالة (WLS) وبالشكل التالي:

$$V\hat{a}r(b_1) = \frac{(0.43)S_e^2}{(0.43)(5) - (1.6384)} = (0.841)S_e^2$$

وكذلك

$$V\hat{a}r(b_0) = \frac{(5)S_e^2}{(0.43)(5) - (1.28)^2} = (9.77)S_e^2$$

أما تباين المعالم في حالة استخدام (OLS) في ظل عدم تجانس التباين ، فيحتسب كالاتي:

$$\hat{Var}(b_1) = \frac{S_e^2\,(676)(168) - (10)(26)(1232) + (25)(9684)}{[(15)(168) - (676)]^2} = 1.31 S_e^2$$

وكذلك

$$\hat{Var}(b_0) = \frac{S_e^2\,(168)^2\,(168) - 2(168)(26)(1232) + (26)^2\,(9684)}{[(5)(168) - (676)]^2} = 19.52 S_e^2$$

وبأفتراض تساوي تباين العينة $\left(S_e^2\right)$ في حالة تجانس الخطأ مع حالة عدم التجانس ، نحصل على الكفاءة النسبية لكل من الميل الحدي والحد الثابت وكالاتي:

$$\therefore \text{efficency of } (b_1) = \frac{0.841\ S_e^2}{1.31\ S_e^2} = 0.642$$

$$\therefore \text{efficency of } (b_0) = \frac{9.77\ S_e^2}{19.52 S_e^2} = 0.5$$

يتضح من مؤشري كفاءة التقدير أعلاه بأن طريقة (WLS) أكثر كفاءة من طريقة (OLS) . حيث أن قيمة تباين الميل الحدي بطريقة (OLS) في ظل فرضية عدم تجانس التباين أكبر بحوالي مرة ونصف من قيمة تباين (b_1) المحتسب بطريقة (WLS).

وتجدر الاشارة هنا إلى ان استخدام طريقة (OLS) مباشرة على مثالنا السابق وتجاهل وجود مشكلة عدم تجانس التباين يؤثر تأثيرا كبيرا على دقة اختبار معنوية معالم العلاقة المدروسة ففي مثل هذه الحالة تحسب قيمة تباين الميل الحدي وفق الصيغة التالية:

$$\hat{Var}(b_1) = S_e^2\,(X'X)^{-1}$$

ولمثالنا السابق

$$\hat{Var}(b_1) = S_e^2 \Big/ \sum x_i^2 = S_e^2 \Big/ \sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$X_i - \overline{X} = x_i = -3.2\ ,\ -2.2\ ,\ -0.2\ ,\ 1.8\ ,\ 3.8$$

$$x_i^2 = 10.24\ ,\ 4.84\ ,\ 0.04\ ,\ 3.24\ ,\ 14.44$$

$$\therefore \hat{Var}(b_1) = S_e^2 / 32.8 = (0.03) S_e^2$$

وهي أقل بكثير من قيمتها الفعلية والمحتسبة بطريقة (OLS) في ظل افتراض عدم تجانس تباين الخطأ.

يتضح من أعلاه ، أن تقدير تباين الميل الحدي متحيز سلبا (Negative Biase) ومثل هـذا التحيـز يـؤدي إلى تكبـير قيمة (t) المحتسبة بصورة غير صحيحة وبالتالي رفض فرضية العدم بشكل خاطئ.

النتائج أعلاه ، يمكن الوصول إليها بأستخدام الصيغ العامة ، ويتم ذلـك مـن خـلال توظيـف اسـلوب المصـفوفات وكالاتي:

$$\hat{Var}-Cov(b)_{WLS}=S_e^2\left(X'W^{-1}X\right)^{-1}=S_e^2\begin{bmatrix}\sum w_i & \sum w_iX_i\\ \sum X_iw_i & \sum X_i^2w_i\end{bmatrix}^{-1}$$

وبما أن:

$$w_i=\frac{1}{X_i^2}$$

$$\hat{Var}-Cov(b)_{WLS}=S_e^2\begin{bmatrix}\sum\frac{1}{X_i^2} & \sum\frac{1}{X_i}\\ \sum\frac{1}{X_i} & n\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{S_e^2\begin{bmatrix}n & -\sum 1/X_i\\ -\sum 1/X_i & \sum 1/X_i^2\end{bmatrix}}{n\sum 1/X_i^2-\left(\sum 1/X_i\right)^2}$$

$$Var\hat{-}Cov(b)_{WLS}=\frac{S_e^2}{0.5116}\begin{bmatrix}5 & -1.28\\ -1.28 & 0.43\end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Var}(b_1)=\frac{(0.43)S_e^2}{0.5116}=(0.841)S_e^2$$

$$\therefore \hat{Var}(b_0)=\frac{(5)S_e^2}{0.5116}=(9.773)S_e^2$$

أما تباين الحد الثابت والميل الحدي في حالة اسـتخدام (OLS) في ظـل افـتراض (WLS) أي بوجـود مشـكلة عـدم تجانس تباين الخطأ.

$$\hat{Var}-Cov(b)=S_e^2(X'X)^{-1}X'WX(X'X)^{-1}$$

علما بأن

$$1/w_i=X_i^2$$

$$\therefore Var \hat{-} Cov(b) = S_e^2 \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & \sum X_i^3 \\ \sum X_i^3 & \sum X_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{S_e^2 \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & \sum X_i^3 \\ \sum X_i^3 & \sum X_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{bmatrix}}{\left[n \sum X_i^2 - \left(\sum X_i \right)^2 \right]^2}$$

أي أن

$$Var \hat{-} Cov(b) = \frac{S_e^2}{26896} \begin{bmatrix} 528644 & -125882 \\ -125882 & 35348 \end{bmatrix}$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_1) = \frac{(35348) S_e^2}{26896} = (1.31) S_e^2$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_0) = \frac{528644 S_e^2}{26896} = (19.655) S_e^2$$

وبالتالي يمكن احتساب كفاءة التقدير ، وفي ظل نفس الافتراض السابق وكالاتي:

$$\text{efficiency of } (b_1) = \frac{(0.841) S_e^2}{(1.31) S_e^2} = 0.642$$

$$\text{efficiency of } (b_0) = \frac{(9.773)\, S_e^2}{(19.655)\, S_e^2} = 0.5$$

وهي نفس النتائج السابقة .

وبنفس الاسلوب أعلاه ، يمكن إعادة حل هذا التمرين عندما يأخذ افتراض عدم تجانس تباين الخطأ الشكل التالي:

$$E\left(U_i^2\right) = \sigma_u^2 X_i$$

هذا يعني:

$$X_i = \frac{1}{W_i} \Rightarrow W_i = \frac{1}{X_i}$$

اذن في حالة (WLS)

$$Var \hat{-} Cov(b)_{WLS} = S_e^2 \left(X' W^{-1} X \right)^{-1} = S_e^2 \begin{bmatrix} \sum 1/X_i & n \\ n & \sum X_i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{S_e^2 \begin{bmatrix} \sum X_i & -n \\ -n & \sum 1/X_i \end{bmatrix}}{\left(\sum 1/X_i \right) \left(\sum X_i \right) - n^2}$$

وبالتعويض نحصل على

$$Var\hat{-}Cov(b)=\frac{S_e^2}{8.28}\begin{bmatrix}26 & -5\\ -5 & 1.28\end{bmatrix}$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_1)=\frac{(1.28)S_e^2}{8.28}=(0.155)S_e^2$$

وكذلك

$$\therefore V\hat{a}r(b_0)=\frac{(26)S_e^2}{8.28}=(3.14)S_e^2$$

وفي حالة تطبيق أسلوب (OLS) على بيانات تعاني من وجود مشكلة عدم تجانس التباين.

$$Var\hat{-}Cov(b)=S_e^2\,(X'X)^{-1}\,X'\,W\,X\,(X'X)^{-1}$$

حيث أن

$$W=\begin{bmatrix}X_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & X_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & X_n\end{bmatrix}$$

$$\therefore Var\hat{-}Cov(b)=S_e^2\begin{bmatrix}n & \sum X_i\\ \sum X_i & \sum X_i^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum X_i & \sum X_i^2\\ \sum X_i^2 & \sum X_i^3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}n & \sum X_i\\ \sum X_i & \sum X_i^2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{S_e^2\begin{bmatrix}\sum X_i^2 & -\sum X_i\\ -\sum X_i & n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum X_i & \sum X_i^2\\ \sum X_i^2 & \sum X_i^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum X_i^2 & -\sum X_i\\ -\sum X_i & n\end{bmatrix}}{\left[n\sum X_i^2-\left(\sum X_i\right)^2\right]^2}$$

$$Var\hat{-}Cov(b)=\frac{S_e^2}{26896}\begin{bmatrix}99008 & -19040\\ -19040 & 4696\end{bmatrix}$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_1)=\frac{(4696)S_e^2}{26896}=(0.17459)S_e^2$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_0)=\frac{(99008)S_e^2}{26896}=(3.68114)S_e^2$$

وفي ظل افتراض تساوي تباين العينة ، يمكن ايجاد الكفاءة النسبية وكالتالي:

$$\text{efficiency of }(b_1)=\frac{(0.155)S_e^2}{(0.17459)S_e^2}=0.887$$

$$\text{efficiency of }(b_0)=\frac{(3.14)\,S_e^2}{(3.68114)\,S_e^2}=0.85$$

يتضح من النتائج أعلاه ، أن الاسلوب (WLS) أكثر كفاءة من اسلوب (OLS).

3.5 اختبار لعدم تجانس تباين الخطأ

أولا: اختبار سبيرمان لارتباط الرتب **Spearman Rank Correlation Test**

لقد وضعت عدة اختبارات للكشف عن وجود مشكلة عدم تجانس التباين ، ومن أول وأبسط هذه الاختبارات هو اختبار معامل ارتباط الرتب والتي يعتمد على القيم المطلقة للأخطاء وقيم المتغير المستقل . ويتطلب احتساب هذا المؤشر تقدير معالم النموذج أولا ، ومنه تحسب الانحرافات ثم يستخرج معامل ارتباط الرتب ما بين القيم المطلقة للانحرافات وقيم المتغير المستقل المعني ، وذلك وفق قانون سبيرمان لارتباط الرتب والذي يرمز له عادة بالرمز (r_s) ، ولغرض اشتقاق هذا المؤشر ،نفرض أن X_i و e_i متغيرين عشوائيين أخذا من عينة عشوائية ذات حجم (n) ، حيث أن (X_i) يشير إلى متغير مستقل في نموذج خطي بسيط و (e_i) يشير إلى الخطأ العشوائي الحاصل عليه من الفرق بين القيمة الحقيقية (المشاهدة) والقيمة التقديرية للمتغير (Y_i) ، أي أن تطبيق مثل هذا النوع من الاختبار يتطلب التقدير الاولي لمعالم النموذج الخطي البسيط . وبما أن (X_i) و $|e_i|$ ممكنة الترتيب تصاعديا أو تنازليا ، حيث تخصص قيم سلسلة اعداد طبيعة ، $1, 2, 3, \ldots, n$ لكل مشاهدة من مشاهدات المتغير المستقل (X_i) ولمطلق الانحرافات $|e_i|$ ، آخذين بنظر الاعتبار عدم تكرار أي مشاهدة ، وفي حالة حدوث مثل هذه الحالة ،سوف يركن إلى متوسط سلسلة الاعداد الطبيعية المعطاة للمشاهدات المتكررة .

الان لتكن سلسلة الاعداد الطبيعية المخصصة إلى كل من (X_i) و $|e_i|$ بعد الترتيب كالاتي:

$X_i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$|e_i| = 1, 2, 3, \ldots, n$

وبالاشارة إلى مطلق الانحرافات بالرمز (e^*_i) ، علما بأن $X_i \neq e^*_i$ ، يمكن بيان ما يلي:

$$\overline{X} = \overline{e}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

في حين تباين المتغير العشوائي في حالة العينات الكبيرة يعطى كالاتي:

$$S_x^2 = S_{e^*}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

وبما أن

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore S_x^2 = \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12} = S_{e^*}^2$$

عليه فإن انحرافات رتب كل من المتغيرين (X_i) و (e_i^*) يمكن وضعها بالشكل التالي:

$$D_i = X_i - e_i^*$$

$$\therefore D_i = \left(X_i - \overline{X}\right) - \left(e_i^* - \overline{e}^*\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \overline{X}\right) - \left(e_i^* - \overline{e}^*\right)\right]^2$$

$$\therefore \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(e_i^* - \overline{e}^*\right)^2}{n} - \frac{2\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(e_i^* - \overline{e}^*\right)}{n}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n} = S_x^2 + S_{e^*}^2 - 2S_{xe^*}$$

وبما أن $r_{xe^*} = \frac{S_{xe^*}}{S_x\, S_{e^*}}$

$$\therefore S_{xe^*} = r_{xe^*}\, S_x\, S_{e^*}$$

بالتعويض ، علما بأن $S_x = S_{e^*}$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n} = 2S_x^2 - 2r_{xe^*}\, S_x^2$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n} = 2S_x^2\left(1 - r_{xe^*}\right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{2nS_x^2} = 1 - r_{xe^*}$$

$$\therefore r_{xe^*} = r_s = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{2nS_x^2}$$

وبالتعويض عن قيمة $\left(S_x^2\right)$ بما تساويها نحصل على

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n\left(n^2 - 1\right)} \qquad (36)$$

حيث ان:

(D_i) تمثل الفرق ما بين رتبة القيم المطلقة للانحرافات ورتبة المتغير المستقل المدروس.

الصيغة رقم (36) أعلاه ، تسمى معامل ارتباط الرتب لسبيرمان ، وكلما كان هذا المعامل عالي وقريب من الواحد الصحيح ، دل ذلك على وجود علاقة قوية بين الانحرافات والمتغير المستقل ، وبالتالي وجود مشكلة عدم تجانس التباين .

إضافة إلى أعلاه ، يمكن ان نختبر مدى تجانس تباين الخطأ في العينة تحت البحث ، حيث يجب ايجاد الانحراف المعياري لمعامل سبيرمان لارتباط الرتب والتي يعطى بالشكل التالي:

$$S.E\left(r_s\right) = S.E\left(r_{e^*x}\right) = 1/\sqrt{n-1}$$

وبالتالي وضع فرضية العدم التالية:

$$H_0 : r_{e^*.x} = 0$$

مقابل الفرضية البديلة

$$H_1 : r_{e^*.x} \neq 0$$

وبما ان $r_{e^*.x} \sim N\left(0, \sigma_{r_e^*.x}\right)$

اذن يمكن استخدام اختبار (Z) حيث تحتسب القيمة العملية لـ (Z) بموجب الصيغة التالية:

$$Z^* = \frac{r_{e^*.x}}{S.E\left(r_{e^*.x}\right)} = \frac{r_{e^*.x}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)} = r_{e^*.x}\sqrt{n-1} \qquad (37)$$

ثم بعد ذلك تقارن القيمة العملية (Z^*) مع القيمة الجدولية والتي تساوي عند المستوى (5%) إلى (± 1.96) ، فإذا كانت القيمة العملية هذه واقعة في مجال التالي:

$$-1.96 \leq Z^* \leq 1.96$$

نقبل (H_0) ، أي هناك تجانس في تباين الخطأ ، وبخلافه نقبل (H_1) . تجدر الاشارة إلى ان صيغة الاختبار أعلاه ، يمكن ان توضع بشكل اخر وكالاتي:

$$r_{r^*.x} > \frac{1.96}{\sqrt{n-1}} \quad \text{.......(38)}$$

وفي حالة تحقق الصيغة رقم (38) أعلاه ، دل ذلك على ان الارتباط معنوي بمستوى دلالة قدره (5%) مما يشير إلى وجود مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ. وبخلافه لا تكون هناك أي مشكلة لعدم تجانس التباين.

مرة اخرى نشير إلى ان الاختبار أعلاه يمكن تطبيقه في حالة وجود أكثر من متغير مستقل في النموذج ، اذا ما اعتقد بان هناك عدد من المتغيرات ترتبط قيمتها بقيم تباين الاخطاء العشوائية.

ثانيا : اختبار بارتليت Bartlett Test

وتقوم الفكرة الاساسية لهذا الاختبار على تجزئة العينة تحت البحث إلى (M) من العينات الجزئية ، ومن ثم احتساب تباين الخطأ لكل عينة جزئية $\left(S_i^2\right)$ بدرجة حرية $\left(n_i - 1\right)$، ومن ثمة البحث عن احتمال سحب هذه العينات الجزئية من مجتمع معين فان قبلت فرضيت العدم التالية:

$$H_0 : \sigma_{u_1}^2 = \sigma_{u_2}^2 = \dots = \sigma_{u_n}^2$$

أو بشكل أكثر اختصارا

$$H_0 : \sigma_{u_i}^2 = \sigma_u^2$$

دل ذلك على ان العينات الجزئية مسحوبة من مجتمع متجانس. مقابل الفرضية البديلة (Alternative Hypothesis) التالية:

$$\sigma_{u_1}^2 \neq \sigma_{u_2}^2 \neq \dots \neq \sigma_{u_n}^2$$

أو

$$H_1 : \sigma_{u_i}^2 \neq \sigma_u^2$$

أي ان تباين الخطأ المحتسب من العينات الجزئية غير متجانس.

وتجدر الاشارة هنا إلى ان هذا النوع من الاختبار غالبا ما يطبق على العينات التي تتوفر فيها أكثر من مشاهدة لكل قيمة من قيم المتغير المستقل ، لذا فإن مثل هذا الاختبار يستوجب تقسيم المتغير المستقل إلى عدة مستويات ولنفرض أن هناك (n_i) من المشاهدات مقابل

كل مستوى حيث ان (i=1, 2, ..., M) ، ومنه يكون المجموع الكلي لمشاهدات العينة مساويا إلى:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = N$$

اضافة إلى ذلك ، نفرض ان المتغيرالمعتمد يرتبط بالمتغير المستقل بموجب الصيغة التالية:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_{ij} + U_{ij}$$

حيث ان

$$j = 1 \ , \ 2 \ , \ \dots \ , n_i$$

والخطوات الاساسية لاجراء اختبار بارتليت تتلخص في ايجاد المقادير التالية:

$$Q = N \log \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i S_{e_i}^2}{N} \right) - \sum_{i=1}^{m} n_i \log S_{ei}^2 \quad \dots\dots (39)$$

وكذلك

$$L = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} - \frac{1}{N} \right) \quad \dots\dots (40)$$

حيث أن

$$S_{e_i}^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \overline{Y}_i \right)^2$$

$$\overline{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$$

والمقدار (Q/L) يتوزع بصورة مقاربة إلى توزيع $\left(\chi_{m-1}^2\right)$ (Chi Square) بدرجة حرية (m-1) ومستوى دلالة معين . وعليه فان فرضية العدم أعلاه تقبل في المجال التالي:

$$Q/L \le \chi_{m-1}^2$$

أي ان تباين الخطأ المحسوب من العينات الجزئية ثابت (متساوي) وبخلافه أي أن:

$$Q/L > \chi_{m-1}^2$$

نقبل الفرضية البديلة ، وهذا بدوره يعني بأن تباين الخطأ المحتسب من العينات الجزئية غير متجانس والنتيجة الاخيرة هذه تستدعي تنقية بيانات العينة تحت البحث من أثر وجود عدم تجانس التباين، كما سنرى ذلك في الجزء الخاص بمعالجة مشكلة عدم تجانس التباين.

ثالثا : اختبار كولد فيلد – كوانت Golfeld – Quandt Test

اضافة إلى ما ذكر أعلاه ،هناك طرق اخرى لا تقل اهمية للكشف عن عدم تجانس تباين الخطأ ، فإذا توفر عدد كبير من مشاهدات المتغير المستقل (X_i) بحيث يمكنس تجزئتها إلى عينتين جزئيتين ، تتضمن العينة الجزئية الاولى على قيم (X_i) الصغيرة ولنرمز لها بـ (X_{1i}) والعينة الجزئية الثانية تضم قيم (X_i) الكبيرة ولنرمز لها بـ (X_{2i}). مع ملاحظة الحالة التي يكون فها حجم العينة الجزئية الاولى أو الثانية غير متساوي مع بعض ، في مثل هذه الحالة نحذف القيم الوسطية سواء كان ذلك من العينة الجزئية الاولى أو الثانية لنحصل على حجم عينتين جزئيتين متساوي.

الخطوات الاساسية لاجراء اختبار كولد فيلد – كوانت تتلخص في ايجاد تقدير لمعالم العلاقة الخطية بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل لكل عينة جزئية على انفراد. ثم احتساب تباين الخطأ للعينة الجزئية الاولى بموجب الصيغة التالية:

$$S_{e_1}^2 = \sum_{i=1}^{n_1} e_{1i}^2 / (n_1 - k - 1)$$

حيث ان $e_{1i} = Y_{1i} - \hat{Y}_{1i}$

(n_1) تمثل حجم العينة الجزئية الاولى

(k) تمثل عدد المتغيرات المستقلة تحت البحث

وكذلك

$$S_{e_2}^2 = \sum_{i=1}^{n_2} e_{2i}^2 / (n_2 - k - 1)$$

حيث ان:

(n_2) تمثل حجم العينة الجزئية الثانية.

والمقدار $\left(S_{e_2}^2 / S_{e_1}^2\right)$ يتبع توزيع (F) بدرجة حرية (n_2-k-1) (n_1-k-1) ومستوى دلالة معين ، حيث يتم قبول فرضية العدم (H_0) الانفة الذكر في المجال التالي:

$$S_{e_2}^2 / S_{e_1}^2 \leq F(n_2 - k - 1)(n_1 - k - 1)$$

وتقبل الفرضية المقابلة (البديلة) (H_1) في المجال التالي:

$$S_{e_2}^2 / S_{e_1}^2 > F(n_2 - k - 1)(n_1 - k - 1)$$

والحالة الاخيرة هذه تستوجب استبعاد اثر وجود عدم تجانس التباين من مشاهدات كل من المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة في العينة المدروسة.

رابعا : اختبار بارك – كليجسر Part-Glejser Test

من الاختبارات الاخرى المستخدمة للكشف عن عدم تجانس التباين هو اختبار كليجسر ، ويعتمد هذا الاختبار على شكل العلاقة بين الانحرافات العشوائية والمتغير المستقل الذي تعتمد عليه تلك الانحرافات.

وتتمثل الخطوة الاولى في هذا الاختبار بتقدير معالم العلاقة الخطية ثم ايجاد قيم الانحرافات الناتجة من الفرق بين القيم الحقيقية والقيم التقديرية للمتغير المعتمد . أما الخطوة الثانية فيتم فيها تحديد صيغ مختلفة وحسب نوع العلاقة التي يعتقد بأنها موجودة ما بين مطلق قيم الاخطاء العشوائية وقيم المتغير المستقل، ومن الامثلة على مثل هذه الصيغ المختلفة :

$$|e_i| = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$
$$|e_i| = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{X_i} + U_i$$
$$|e_i| = \beta_0 + \beta_1 / X_i + U_i$$

والخطوة الاخيرة في هذه الاختبار تتمثل في اجراء اختبار معنوية العلاقة المفترضة، حيث يستدل منها فيما اذا كانت هناك مشكلة عدم تجانس التباين أولا ، وتحديد صيغة العلاقة بين الاخطاء العشوائية والمتغير المستقل ثانيا.

وتجدر الاشارة هنا إلى ان الاختبار أعلاه يعتمد في تحديد الصيغة الملائمة على التجربة، في الجزء القادم من هذا الفصل سوف نعالج مثل هذه المشكلة بصيغة محددة.

3.6 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين

تتمثل معالجة مشكلة عدم تجانس التباين بتحديد الاوزان (w_i) المارة الذكر ومن ثمة استخدام هذه الاوزان في تحويل صيغة النموذج الخطي البسيط التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i \quad \text{.......(41)}$$

إلى الشكل الذي يؤدي إلى جعل تباينات الاخطاء العشوائية متساوية ، ولاجراء مثل هذا التحويل ينبغي معرفة العلاقة ما بين تباين الاخطاء العشوائية والمتغير المستقل الذي تعتمد عليه تلك القيم.

بشكل عام يفترض بأن هناك ارتباط بين تباين الاخطاء العشوائية ومتغير معين من المتغيرات المستقلة وليكن (Z_i) وعلى الوجه التالي:

$$E\left(U_i^2\right)=\sigma_{u_i}^2=\sigma_u^2\, z_i^{\gamma} \quad \ldots\ldots (42)$$

حيث أن ($Z_i>0$) ، وان (γ)عبارة عن معيار قوة عدم تجانس تباين الخطأ.

يتضح من الصيغة رقم (42) أعلاه ، كلما انخفضت قيمة (γ) قل عدم تجانس التباين للأخطاء حتى اذا كانت $\gamma=0$ فان هناك تجانس في تباين الخطأ ، علما بأن المتغير (Z_i) قد يكون مساويا لقيمة المتغير المستقل (X_i) ، أو قد يكون مساويا إلى القيمة التقديرية للمتغير المعتمد (Y_i) في النموذج الخطي المدروس، فإذا وجد من التقدير الاولي لبيانات العينة بأن تباين الخطأ المقدر للنموذج رقم (41) يتناسب طرديا مع قيمة المتغير المستقل (X_i) عندها يمكن تحويل العلاقة رقم (42) كالاتي:

$$E\left(U_i^2\right)=\sigma_{u_i}^2=\sigma_u^2\, X_i^{\gamma} \quad \ldots\ldots (43)$$

وفي ضوء النموذج الخطي البسيط رقم (41) يمكن تقدير قيمتي (γ) و$\left(\sigma_u^2\right)$ ، ولنستخدم لذلك اسلوب دالة الامكان الاعظم (MLE).

$$L=\prod_{i=1}^{n} P_r\left(Y_i\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n}\prod_{i=1}^{n}\left(\sigma_{u_i}^2\right)^{-1/2} e^{-(1/2)\sum\frac{U_i^2}{\sigma_{u_i}^2}}$$

والتحويل اللوغارتمي للدالة أعلاه يعطي كالاتي:

$$\ln(L)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum\ln\sigma_{u_i}^2-\frac{1}{2}\sum\frac{U_i^2}{\sigma_{u_i}^2}$$

وبما أن $\sigma_{u_i}^2=\sigma_u^2\, X_i^{\gamma}$

$$\therefore \ln\sigma_{u_i}^2=\ln\sigma_u^2\, X_i^{\gamma}$$

$$\therefore \ln\sigma_{u_i}^2=\ln\sigma_u^2+\gamma\ln X_i$$

ومن النموذج رقم (41) أعلاه لدينا

$$U_i=Y_i-\beta_0-\beta_1 X_i$$

بالتعويض نحصل على:

$$\ln L=-\frac{n}{2}(2\pi)-\frac{1}{2}\sum\left(\ln\sigma_u^2+\gamma\ln X_i\right)-\frac{1}{2}\sum\left[\frac{Y_i-\beta_0-\beta_1 X_i}{\sigma_u X_i^{\gamma/2}}\right]^2$$

وبالاشتقاق الجزئي بالنسبة إلى $\left(\beta_0\right)$ ، $\left(\beta_1\right)$ ، $\left(\sigma_u^2\right)$ ، (γ) نحصل على:

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \beta_0} = \frac{1}{\hat{\sigma}_u^2}\sum\left[\frac{Y_i - b_0 - b_1 X_i}{X_i^{\hat{\gamma}}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\hat{\sigma}_u^2}\sum\left[\frac{(Y_i - b_0 - b_1 X_i)X_i}{X_i^{\hat{\gamma}}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}_u^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}_u^4}\sum\left[\frac{Y_i - b_0 - b_1 X_i}{X_i^{\hat{\gamma}/2}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \gamma} = -\frac{1}{2}\sum \ln X_i + \frac{1}{2\hat{\sigma}_u^2}\sum\left[\frac{(Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2 \ln X_i}{X_i^{\hat{\gamma}}}\right] = 0$$

بحل المعادلات الاربعة أعلاه يمكن الحصول على تقدير لكل من (β_0) ، (β_1) ، (σ_u^2) ، (γ) ولكن مثل هذا الحل يكتنفه شيء من التعقيد بسبب ارتفاع درجة غير الخطية ، ولتلافي ذلك يمكن افتراض قيم مختلفة لـ (γ) ثم التعويض في المعادلات الثلاثة الاولى ، ومنه يمكن الحصول لكل قيمة من قيم (γ) المفترضة تشكيله معينة من قيم (b_0) ، (b_1) ، $(\hat{\sigma}_u^2)$ المقدرة.

وفي ضوء كل تشكيله من هذه التشكيلات سوف نحصل على عدد من قيم (L) ، ونتوقف عندما يتم الحصول على أعظم احتمال مشترك . وبالتالي يعتمد قيم (b_0) ، (b_1) ، $(\hat{\sigma}_u^2)$ ، $(\hat{\gamma})$ المقدرة والتي من شأنها تعظيم قيمة (L) باعتبارها تقديرات دالة الامكان الاعظم لمعالم المجتمع في حالة عدم تجانس تباين الخطأ.

وتجد الاشارة هنا إلى ان بارك – كليجسر أستبدل اسلوب التقدير أعلاه بأسلوب اخر أكثر بساطة لتقدير كل من (γ) و (σ_u^2) معتمدا في ذلك على الصيغة رقم (43) والمعاد كتابتها في أدناه:

$$\sigma_{u_i}^2 = \sigma_u^2 X_i^{\gamma} . U_i$$

ويأخذ اللوغارتيم لطرفي العلاقة أعلاه نحصل على :

$$\log \sigma_{u_i}^2 = \log \sigma_u^2 + \gamma \log X_i + \log U_i$$

وبالتعويض عن $(\sigma_{u_i}^2)$ بمجموع مربعات الانحرافات نحصل على :

$$\log e_i^2 = \log \sigma_u^2 + \gamma \log X_i + \log U_i \quad \text{......(44)}$$

حيث يمكن تقدير معالم العلاقة رقم (44) وذلك بتطبيق اسلوب المربعات الصغرى الاعتيادية وكالاتي:-

$$\hat{\gamma} = \frac{n\sum \log X_i \log e_i^2 - \left(\sum \log X_i\right)\left(\sum \log e_i^2\right)}{n\sum \left(\log X_i\right)^2 - \left(\sum \log X_i\right)^2}$$

أما الحد الثابت فيقدر كالاتي:

$$\log \hat{\sigma}_u^2 = \overline{\log e^2} - \hat{\gamma}\,\overline{\log X}$$

ويعرف هذا الاسلوب في التقدير باختبار بارك – كليجسر ، وذلك لامكانية معرفة مدى معنوية المعالم المقدرة بهذا الاسلوب ، بعبارة اخرى يمكن استخدام اختبار (t) لبيان مدى معنوية ودقة كل من الميل الحدي المقدر $(\hat{\gamma})$ والحد الثابت $(\log \hat{\sigma}^2)$ المقدر.

وبعد تقدير (γ) بموجب اسلوب بارك – كليجسر أعلاه ، يصبح بالامكان تطبيق طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) حيث أن:

$$w_i = \frac{1}{X_i^{\hat{\gamma}}}$$

وبالتعويض في مصفوفة (P^{-1}) المارة الذكر وذلك لغرض استبعاد أثر عدم تجانس التباين من بيانات العينة تحت البحث ، ولمثالنا الانف الذكر ، نموذج رقم (41) نحصل على:

$$\frac{Y_i}{X_i^{\frac{\hat{\gamma}}{2}}} = \beta_0\left(\frac{1}{X_i^{\hat{\gamma}/2}}\right) + \beta_1\left(X_i\right)^{1-\hat{\gamma}/2} + U_i^* \quad \text{.........} (45)$$

حيث أن

$$U_i^* = U_i / X_i^{\hat{\gamma}/2}$$

أي ان مشاهدات المتغير المعتمد سوف تأخذ الشكل التالي:

$$P^{-1}Y = \begin{bmatrix} Y_1/X_1^{\hat{\gamma}/2} \\ \vdots \\ Y_n/X_n^{\hat{\gamma}/2} \end{bmatrix}$$

وكذلك الحال بالنسبة للمتغيرات المستقلة

$$P^{-1}X = \begin{bmatrix} 1/X_1^{\hat{\gamma}/2} & \left(X_1\right)^{1-\hat{\gamma}/2} \\ \vdots & \vdots \\ 1/X_n^{\hat{\gamma}/2} & \left(X_n\right)^{1-\hat{\gamma}/2} \end{bmatrix}$$

واذا حدث وان كان قيمة $(\hat{\gamma})$ مساوية تماما إلى القيمة (2) ، فإن النموذج رقم (45) يختزل إلى الشكل التالي:

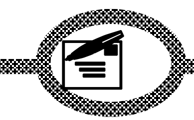
$$Y_i / X_i = \beta_0 / X_i + \beta_1 + U_i^* \quad (46)$$

حيث أن

$$U_i^* = U_i / X_i$$

النموذج رقم (45) يتضمن متغيرين مستقلين الاول يتمثل بالمتغير $\left(1/X_i^{\hat{\gamma}/2}\right)$ والثاني يتمثل بالمتغير $\left(X_i^{1-\hat{\gamma}/2}\right)$ ، ولغرض التمييز بين الحد الثابت والميل الحدي لهذا النموذج يستوجب بعد تقدير معالمه ضربة بالمقدار التالي:$\left(X_i^{\hat{\gamma}/2}\right)$.

أما النموذج رقم (46) فأنه يتضمن متغير مستقل واحد وهو $\left(1/X_i\right)$ ، وعليه يستوجب ضربة بالمقدار $\left(X_i\right)$ وذلك حتى أن تأخذ معالمه المقدرة وضعها الصحيح.



مثال تطبيقي(2)

من واقع بيانات العينة

Y_{ij}	X_i
1.8, 2, 2, 2, 2.1	5
3, 3.2, 3.5, 3.5, 3.6	10
4.2, 4.2, 4.5, 4.8, 5	15
4.8, 5, 5.7, 6, 6.2	20

أوجد ما يأتي:

1. اختبر فيما إذا كانت مشاهدات هذه العينة متجانسة أم لا ، مستخدما اختيار كولدفيلد-كوانت.

2. قدر معالم النموذج التالي: $E\left(Y_{ij}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ مستبعدا أثر عدم تجانس التباين أن وجد، وذلك بوضع $(\hat{\gamma} = 2)$ أولا ، ثم تقدير قيمة (γ) بموجب اسلوب بارك كليجسر ثانيا.

الحل:

لاجراء اختبار كولدفيلد كوانت ،يستوجب تجزئة العينة تحت البحث إلى عينتين جزئيتين ، كل واحدة منها بحجم (10) مشاهدات وذلك بعد ترتيب قيم المتغير المستقل ترتيبا تصاعديا وكالاتي:

Y_i=1.8, 2, 2, 2, 2.1, 3, 3.2, 3.5, 3.5, 3.6, 4.2, 4.2, 4.5, 4.8, 5, 4.8, 5, 5.7, 6, 6.2,

X_i=5, 5, 5, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 10, 15, 15, 15, 15, 15, 20, 20, 20, 20, 20,

والمتكررة خمسة مرات لكل واحدة ، أي ان (10)و (5) ، أي المشاهدات (X_i)العينة الجزئية الاولى تتمثل بالقيم الصغيرة لـ $n_1=10$

والعمليات الحسابية التالية ضرورية لاحتساب تباين الخطأ للعينة الجزئية الاولى

$$n_1 = 10 \; , \; \sum Y_i = 26.7 \; , \; \sum X_i = 75 \; , \; \overline{X} = 7.5$$

$$\overline{Y} = 2.67 \; , \; \sum X_i^2 = 625 \; , \; \sum X_i Y_i = 217.5$$

بتطبيق اسلوب (OLS) نحصل على

$$b_1 = \frac{\sum X_i Y_i - n_1 \overline{X}\,\overline{Y}}{\sum X_i^2 - n_1 \overline{X}^2}$$

$$\therefore b_1 = \frac{217.5 - (10)(7.5)(2.67)}{625 - (10)(7.5)^2} = 0.276$$

أما الحد الثابت فيقدر كالاتي

$$b_o = \overline{Y} - b_1 \overline{X} = 2.67 - (0.276)(7.5) = 0.6$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 0.6 + 0.276 X_i$$

$$S_{e_1}^2 = \frac{\sum e_{1i}^2}{n_1 - k - 1} = \frac{0.3}{8} = 0.0375$$

العمليات الحسابية اللازمة من العينة الجزئية الثانية (القيم الكبيرة للمتغير المستقل X_i)

$$n_2 = 10 \; , \sum X_i = 175 \; , \; \sum X_i^2 = 3125 \; , \; \sum Y_i = 50.4 \; , \; \sum X_i \; Y_i = 894.5$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{LS} (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} n_2 & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i \; Y_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 175 \\ 175 & 3125 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50.4 \\ 894.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.54 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 1.54 + 0.2\,X_i$$

$$S_{e2}^2 = \frac{\sum e_{1i}^2}{n_2 - k - 1} = \frac{2.024}{8} = 0.253$$

$$\therefore\ S_{e2}^2 \Big/ S_{e1}^2 = \frac{0.253}{0.0375} = 6.7467$$

ومن جداول (F) النظرية نحصل على :

$$F(8,\ 8, 0.05) = 3.44$$

$$\therefore S_{e2}^2 / S_{e1}^2 > F_{tab}$$

وبعد المقارنة ، نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة ، أي ان هناك مشكلة وجود عدم تجانس تباين الخطأ.

استبعاد أثر عدم تجانس تباين الخطأ على افتراض $(\hat{\gamma} = 2)$ ، وبموجب هذا الافتراض سوف يأخذ النموذج التالي:

$$Y_i / X_i^{\hat{\gamma}/2} = \beta_0 \left(1 / X_i^{\hat{\gamma}/2}\right) + \beta_1 (X_i)^{1-\hat{\gamma}/2} + U_i / X_i^{\hat{\gamma}/2}$$

الشكل الاتي:

$$\frac{Y_i}{X_i} = \beta_0 \left(\frac{1}{X_i}\right) + \beta_1 + U_i / X_i$$

أو

$$Y_i^* = \beta_0\, X_i^* + \beta_1 + U_i^*$$

حيث أن

$$U_i^* = U_i / X_i \quad , \quad X_i^* = 1/X_i \quad , \quad Y_i^* = Y_i / X_i$$

من بيانات العينة تحت البحث تم التوصل إلى العمليات الحسابية التالية:

$$n = 20 \quad , \quad \sum X_i^* = 2.083333 \quad , \quad \sum X_i^{*2} = 0.2847222$$

$$\sum Y_i^* = 6.558333 \quad , \quad \sum X_i^*\, Y_i^* = 0.7341387$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}\, X'Y = \begin{bmatrix} n & \sum X_i^* \\ \sum X_i^* & \sum X_i^{*2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i^* \\ \sum X_i^*\, Y_i^* \end{bmatrix}$$

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} 20 & 2.08333 \\ 2.08333 & 0.2847222 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6.558333 \\ 0.7341387 \end{bmatrix}$$

$$|X'X| = 1.354167612$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} 0.2102562 & -1.5384604 \\ -1.5384602 & 14.76922 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.558333 \\ 0.7341387 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.249487 \\ 0.7529216 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Y_i^* = 0.7529216\, X_i^* + 0.249487 + U_i^*$$

وحتى ان تكون الصيغة المقدرة أعلاه بدلالة المتغيرات الاصلية تضرب بـ (X_i)

$Y_i = 0.7529216 + 0.249487\ X_i + U_i$

أما تقدير قوة عدم تجانس تباين الخطأ باستخدام اسلوب بارك-كليجسر واستبعاد أثره ، مثل هذا الاسـلوب يسـتوجب أولا ايجاد الانحرافات الناتجة من الفرق بين القيمة الحقيقة والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد ، من بيانات العينة الانفة الذكر يمكن الحصول إلى العمليات الحسابية التالية:

$$n = 20 \ , \ \sum X_i = 250 \ , \ \sum X_i^2 = 3750$$

$$\sum Y_i = 77.1 \ , \ \sum X_i\ Y_i = 1112$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{LS} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i\ Y_i \end{bmatrix}$$

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} 20 & 250 \\ 250 & 3750 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 77.1 \\ 1112 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.89 \\ 0.2372 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 0.89 + 0.2372\, X_i$$

وباستخدام الصيغة التقديرية أعلاه ، يمكن الوصول إلى الانحرافات أي:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

ومن ثم إجراء العمليات الحسابية التالية :

$$\sum \log X_i\ 20.880456 \ , \ \left(\sum \log\ X_i\right)^2 = 435.99346 \ , \ \sum (\log X_i)^2 = 22.822144 \ ,$$

$$\sum \log\ e_i^2 = -28.78238 \ , \ \sum \log\ X_i \log\ e_i^2 = -27.867377, \quad n = 20$$

وبالتالي تقدير معالم الصيغة التالية :

$$\log e_i^2 = \log \sigma_u^2 + \gamma \log\ X_i + \log U_i$$

حيث أن (γ) يمكن تقديرها بالشكل التالي:

$$\hat{\gamma} = \frac{n \sum \log X_i \log e_i^2 - \sum \log X_i \sum \log e_i^2}{n \sum (\log X_i)^2 - \left(\sum \log X_i\right)^2}$$

أما

$$\log \hat{\sigma}_u^2 = \overline{\log\ e^2} - \hat{\gamma}\, \overline{\log\ X}$$

أي أن:

$$\hat{\gamma}=\frac{(20)(-27867377)-(20.880456)(-28.78238)}{(20)(22.822144)-(435.99346)}=\frac{43.641679}{20.44942}=2.1347606=2.14$$

وبعد التعويض بهذه القيمة في النموذج المذكور أعلاه، نحصل على:

$$\frac{Y_i}{X_i^{\hat{\gamma}/2}}=\beta_0\left(\frac{1}{X_i^{\hat{\gamma}/2}}\right)+\beta_1(X_i)^{1-\hat{\gamma}/2}+\frac{U_i}{X_i^{\hat{\gamma}/2}}$$

$$\therefore\frac{Y_i}{X_i^{1.07}}=\beta_0\left(\frac{1}{X_i^{1.07}}\right)+\beta_1(X_i)^{-0.07}+U_i\left(\frac{1}{X_i^{1.07}}\right)$$

لتقدير معالم النموذج أعلاه ، يستوجب تحديد عناصر مصفوفة $(X'X)$ وكذلك عناصر موجه $(X'Y)$، أي ان:

$$(X'X)=\begin{bmatrix}\frac{1}{X_1^{1.07}} & \cdots & \frac{1}{X_n^{1.07}}\\ X_1^{-0.07} & \cdots & X_n^{-0.07}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{X_1^{1.07}} & X_1^{-0.07}\\ \vdots & \vdots\\ \frac{1}{X_n^{1.07}} & X_n^{-0.07}\end{bmatrix}$$

$$\therefore(X'X)=\begin{bmatrix}\sum\frac{1}{X_i^{2.14}} & \sum\frac{1}{X_i^{1.14}}\\ \sum\frac{1}{X_i^{1.14}} & \sum\frac{1}{X_i^{0.14}}\end{bmatrix}$$

وكذلك

$$X'Y=\begin{bmatrix}\frac{1}{X_1^{1.07}}\cdots & \frac{1}{X_n^{1.07}}\\ X_1^{-0.07}\cdots & X_n^{-0.07}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{Y_1}{X_1^{1.07}}\\ \vdots\\ \frac{Y_n}{X_n^{1.07}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\frac{Y_i}{X_i^{2.14}}\\ \sum\frac{Y_i}{X_i^{1.14}}\end{bmatrix}$$

من أعلاه يتضح أن مصفوفة المعلومات $(X'X)$ وموجه $(X'Y)$ أصبح الان بعناصر موزونة ، وذلك بسبب ترجيحها بالمقدار $\hat{\gamma}=2.14$ وهذا بدوره يتطلب اجراء العمليات الحسابية التالية :

$$\sum\frac{1}{X_i^{2.14}}=0.2193019\ ,\ \sum\frac{1}{X_i^{1.14}}=1.5529905$$

$$\sum \frac{Y_i}{X_i^{0.14}} = 14.322969 \;,\; \sum \frac{Y_i}{X_i^{2.14}} = 0.552398 \;,\; \sum \frac{Y_i}{X_i^{1.14}} 4.7439743$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{LS} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} \sum \frac{1}{X_i^{2.14}} & \sum \frac{1}{X_i^{1.14}} \\ \sum \frac{1}{X_i^{1.14}} & \sum \frac{1}{X_i^{0.14}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum \frac{Y_i}{X_i^{2.14}} \\ \sum \frac{Y_i}{X_i^{1.14}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2193019 & 1.5529905 \\ 1.552905 & 14.322969 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.552398 \\ 4.743974 \end{bmatrix}$$

$$|(X'X)| = 3.1410543 - 2.4117795 = 0.7292748$$

$$\therefore b_0 = \frac{7.9119794 - 7.367347}{0.7292748} = 0.7468$$

$$b_1 = \frac{1.0403626 - 0.8578688}{0.7292748} = 0.250$$

$$\therefore \frac{Y_i}{X_i^{1.07}} = 0.7468 \left(\frac{1}{X_i^{1.07}} \right) + 0.250\, X_i^{-0.7}$$

ولغرض ارجاع الصيغة المقدرة بدلالة المتغيرات الأصلية ، يستوجب ضربها بالمقدار $\left(X_i^{1.07}\right)$ وكالاتي:

$$\therefore \hat{Y}_i = 0.7468 + 0250\, X_i$$

التقديرات أعلاه ما هي إلا عبارة عن تقديرات (WLS) ، الحاصل عليها عن طريق استبعاد أثر عدم تجانس التباين مباشرة من بيانات العينة ، وهي مطابقة تماما لتقديرات المربعات الصغرى الموزونة (المرجحة) والمحتسبة من الصيغ العامة المذكورة سابقا .

3.7 جدول تحليل التباين (ANOVA)

في الفصل الأول والثاني من هذا الكتاب ، تم تحليل انحرافات المتغير المعتمد في ظل فرضية التجانس ، حيث جزء مجموع الانحرافات الكلية إلى جزئين ، الاول يمثل مجموع مربعات الانحرافات الموضحة والثاني يمثل مجموع مربعات الانحرافات غير الموضحة (البواقي) ، أي ان

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

نفس أسلوب التحليل أعلاه ، يمكن تطبيقه في حالة فرضية عدم تجانس تباين الخطأ ، آخذين بنظر الاعتبار الاوزان الـواردة في مصفوفة $\left(\mathbf{P}^{-1}\right)$ ، حيث أن

$$\left(\mathbf{PP'}\right)^{-1} = \mathbf{W}^{-1}$$

بتوظيف هذه الاوزان وبأستخدام لمصفوفات للتعبير عن كافة مصادر الانحرافات ، نحصل على:

$$\mathbf{e'W^{-1}e} = \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}_{\mathbf{WLS}}\right)' \mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}_{\mathbf{WLS}}\right)$$

$$= \mathbf{Y'W^{-1}Y} - 2\mathbf{b}'_{\mathbf{WLS}}\mathbf{X'W^{-1}Y} + \mathbf{b}'_{\mathbf{WLS}}\,\mathbf{X'W^{-1}X}\mathbf{b}_{\mathbf{WLS}}$$

بالتعويض عن قيمة $(\mathbf{b}_{\mathbf{WLS}})$ نحصل على:

$$\mathbf{e'\,W^{-1}\,e} = \mathbf{Y'\,W^{-1}\,Y} - \mathbf{b}'_{\mathbf{WLS}}\,\mathbf{X'\,W^{-1}\,Y}$$

$$\mathbf{Y'\,W^{-1}\,Y} = \mathbf{b}'_{\mathbf{WLS}}\mathbf{X'W^{-1}Y} + \mathbf{e'\,W^{-1}\,e} \quad \text{.......... (47)}$$

الصيغة رقم (47) أعلاه ، توضح المصادر الاساسية لانحرافات مشاهدات موجه المتغير المعتمد (Y) في ظل فرضية عدم تجانس تباين الخطأ ، حيث أن

$\mathbf{Y'\,W^{-1}\,Y}$ تمثل الانحرافات الكلية (TSS)

$\mathbf{b}'_{\mathbf{WLS}}\mathbf{X'\,W^{-1}\,Y}$ تمثل الانحرافات الموضحة (ESS)

$\mathbf{e'\,W^{-1}\,e}$ تمثل الانحرافات غير الموضحة (المتبقي) (RSS)

صيغة معامل التحديد في ظل حالة عدم تجانس التباين تعطى كالاتي:

$$\mathbf{R}^2 = \frac{\mathbf{ESS}}{\mathbf{TSS}} = \frac{\mathbf{b}'_{\mathbf{WLS}}\,\mathbf{X'\,W^{-1}\,Y}}{\mathbf{Y'\,W^{-1}\,Y}}$$

عليه يمكن التعبير عن مصادر الانحرافات الثلاثة انفة الذكر بدلالة معامل التحديد بالشكل التالي:

$$\mathbf{Y'\,W^{-1}\,Y\,R^2} = \mathbf{b}'_{\mathbf{WLS}}\,\mathbf{X'\,W^{-1}Y} \quad \text{.......... (48)}$$

من الصيغة رقم (47) ، بعد التعويض وإعادة الترتيب نحصل على

$$\mathbf{e'\,W^{-1}\,e} = \mathbf{Y'\,W^{-1}\,Y} - \mathbf{Y'\,W^{-1}\,Y\,R^2}$$

$$\mathbf{e'\,W^{-1}\,e} = \mathbf{Y'\,W^{-1}\,Y}\left(\mathbf{1} - \mathbf{R}^2\right) \quad \text{.......... (49)}$$

الصيغة أعلاه تمثل الانحرافات غير الموضحة بدلالة معامل التحديد ، في حين الصيغة رقم (48) تمثل الانحرافات الموضحة بدلالة معامل التحديد ، أما الصيغة رقم (47) فتمثل الانحرافات الكلية ، مصادر الانحرافات الثلاثة أعلاه تكون حجر الاساس في بناء جدول تحليل التباين (ANOVA) في ظل افتراض عدم تجانس تباين الخطأ وكما في الجدول التالي:

جدول تحليل التباين (ANOVA)

S of V	SS	D.F	MSS	F-test
الانحرافات الموضحة due to $X_1, X_2, \ldots X_k$	$b'_{WLS}\, X'W^{-1}\, Y = Y'W^{-1} Y R^2$	k	$\frac{Y'W^{-1}\, Y R^2}{k}$	$F_o = \frac{\frac{Y'W^{-1}\, Y R^2}{k}}{\frac{Y'\, W^{-1} Y (1-R^2)}{n-k-1}}$ $\therefore F_0 = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{(1-R^2)}{(n-k-1)}}$
الانحرافات غير الموضحة (Residual)	$e'W^{-1}e = Y'\, W^{-1}\, Y (1-R^2)$	n-k-1	$\frac{Y'W^{-1}\, Y (1-R^2)}{n-k-1}$	
الانحرافات الكلية(Total Variance)	$Y'\, W^{-1}\, Y$	n-1		

وبمقارنة قيمة (F_o) العملية مع القيمة النظرية (الجدولية) المقابله لها بدرجة حرية (k) , (n-k-1) ولمستوى دلالة معين ، فإذا كانت

$$F_0 < F_t$$

دل ذلك على عدم معنوية العلاقة الخطية المفترضة بين المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة، وبعكسه يكون هناك تأثير وعلاقة وثيقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير المعتمد.



التمارين

1 تكلم بشكل مفصل عن مشكلة عدم تجانس التباين ، متناولا جانب الاختبار لوجودها في بيانات العينة وطرق معالجتها في الواقع التطبيقي.

2 أوجد كفاءة تقدير معالم النموذج التالي:

$$Y_i = \gamma_0 + \gamma_1 X_i + U_i$$

$$E(U_i = 0) \;,\;\; E(U_i^2) = \sigma_u^2 / X_i \;\;,\;\; E(U_i\ U_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$$

علما بان المتغير المستقل في النموذج أعلاه ، أخذ المشاهدات التالية:

X_i=1, 2, 3, 4.

3 فرضا بأن المتغير المستقل (X_t) في النموذج أدناه:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t$$

اخذ المشاهدات التالية :

X_t=1, 2, 3, 4, 5.

علما بأن $U_t \sim N(0\,,\ \sigma_u^2 X_t^2),\ E(U_t\,U_s) = 0 \quad \forall\ \ t \neq S$

أوجد كفاءة تقدير معالم النموذج باستخدام (WLS) نسبة إلى (OLS).

4 للنموذج الخطي التالي:

$$y_t = \gamma x_t + u_t \qquad t = 1\,,\,2\,,\,3\ \ ,\ldots,\,n$$

$$E(u_t) = 0 \;,\;\; Var(u_t) = \sigma_u^2\,[E(y_t)]^2$$

اثبت بأن تقدير (γ) باستخدام (WLS) مساويا إلى

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{y_t}{x_t}$$

هل نتيجة التقدير أعلاه تبقى على حالها ، عندما يكون النموذج المدروس متضمنا حد ثابت ؟ وضح اجابتك.

5 النموذج التالي

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$$

يتصف بصفة عدم تجانس التباين.

حيث أن $i=1,2$

$$U_1 \sim N(0\,,\sigma_u^2)\ ,\ U_2 \sim N(0\,,\ 2\,\sigma_u^2)\ ,\quad E(U_1\,U2)=0$$

قدر معالم هذا النموذج ، ثم بين كفاءة تقدير (WLS) نسبة إلى (OLS) ، علما بأن

$X_1=1\ ,\ X_2=-1$

6 البيانات التالية تمثل قيمة الايجار المدفوع (Y_i) من قبل (20) أسرة وعدد الغرف في كل منزل (X_1) ونوعية التكييف فيه (X_2) ، حيث ان المتغير الاخير اخذ شكل المتغيرات الصماء (متغير صوري) ، وكانت قيمة $X_2=1$ إذا كان المسكن مكيف مركزيا وبخلافه $X_1=0$.

التسلسل	Y_I	X_1	X_2	التسلسل	Y_i	X_1	X_2
1	21.2	5	0	11	12.0	1	1
2	11.4	2	0	12	9.6	1	0
3	14.8	4	0	13	14.8	2	1
4	15.0	3	0	14	17.4	4	1
5	12.2	1	1	15	9.6	1	0
6	14.0	2	1	16	13.2	3	0
7	16.2	5	0	17	18.8	5	1
8	14.8	2	1	18	21.2	5	0
9	21.2	5	0	19	15.8	3	1
10	15.8	3	1	20	18.0	4	0

أوجد ما يأتي:

1. أختبر لوجود مشكلة عدم تجانس التباين ، مستخدما اسلوب سبيرمان لارتباط الرتب أولا، وبارك – كليجسر ثانيا.

2. قدر معالم دالة الايجار في ضوء نتيجة الاختبار أعلاه.

3. ضع جدول تحليل التباين (ANOVA) ثم أختبر مدى معنوية العلاقة الخطية المفترضة ، مستخدما مستوى دلالة 5%.

7 للنموذج الخطي العام (GLM) التالي

$$\mathbf{Y = X\beta + U}$$

$$\mathbf{U \sim N(0\,,\,\sigma_u^2\,W) \quad , \quad E\left(U_t U_t'\right) = 0 \quad \forall\; t \neq t'}$$

حيث ان

(W) مصفوفة قطرية دات (nxn)

(X) مصفوفة ذات ((nx(k+1)

(β) موجه ذو ((k+1)x1)

(Y) و (U) موجه ذو (nx1) على التوالي.

1- في ظل فرضية عدم تجانس تباين الخطأ أعلاه ، أشتق صيغة لتقدير موجه (β) ، ما هي مصفوفة التباين والتباين المشترك لهذا الموجه ؟

2- استخدم اسلوب (ML) لتقدير موجه (•) ، ثم بين أن مثل هذا الاسلوب يعطي تقديرا متحيزا لتباين العينة ، (S_e^2).



مشكلــة الارتبـــاط الذاتـــي

The Problem of Autocorrelation

4.1 المقدمة

تظهر ظاهرة الارتباط الذاتي في اغلب الدراسات التي تأخذ شكل السلاسل الزمنية **(Time Series data)** ، وكـذلك في البحوث التي تعتمد على بيانات مقطعية **(Cross-Section Data)** ، وخاصة البيانات المقطعية التي تأخذ شـكل أوسـاط مجاميع **(Grouping of Observations)** وقد تنشـأ هـذه الظـاهرة نتيجـة لحـذف بعـض المتغـيرات المسـتقلة مـن العلاقـة المدروسة، أي نتيجة للتشخيص الغير دقيق للعلاقة بين المتغير المعتمـد والمتغـيرات المسـتقلة ، أو قـد تكـون هنـاك عوامـل عشوائية تؤثر على القيم المتتالية للخطأ كما يحصل في حالات الحروب وعـدم الاسـتقرار والجفـاف حيـث يمتـد اثرهـا عـلى مشاهدات العينة ولمدى عدة سنوات متعاقبة ، مما يتسبب في حصول ارتباط ذاتي ما بين الاخطـاء المتعاقبـة والناتجـة مـن الفرق بن القيم المشاهدة والتقديرية للمتغير المعتمد.

إضافة إلى أعلاه ، قد تظهر مثل هذه المشكلة نتيجة لاجراء تعديلات في البيانات او اللجوء إلى تقدير قـيم بعـض المشاهدات اعتمادا على قيم مشاهدات اخرى ، ذلك ان عمليات التعديل والتقدير تعتمد في العادة على اخذ معدلات قـيم المشاهدات المتتالية ، مما يخلق علاقة ما بين اخطاء تلك المشاهدات وبالتالي التأثير على طبيعة توزيعها ، وعليه يسـتوجب إعادة النظر في الفرضيات الاساسية التي يستند عليها النموذج الخطي سواء كان بسيطا أو متعددا.

4.2 الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى

من الفرضيات الأساسية التي تم الاعتماد عليها في تقدير معـالم النمـوذج الخطـي، هـي فرضـية انعـدام الارتبـاط الذاتي بين أخطاء المشاهدات المختلفة في العينة تحت البحث ، بعبارة أخرى:

$$E(U_t U_{t-s}) = 0 \quad , \quad t=1, 2, 3, \ldots, n$$

ففي الحالة التي تكون فيها الظاهرة الاقتصادية أو الاجتماعية المدروسة ، متضمنة وجود ارتباط ذاتي بين اخطاء المشاهدات المدروسة ، تصبح الفرضية أعلاه كالاتي:

$$E(U_t U_{t-s}) \neq 0$$

ولتحليل الفكرة الاساسية للارتباط الذاتي ، دعنا أن ناخذ نموذجا خطيا بسيطا كالاتي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t \quad \ldots\ldots (1)$$

ولنفرض بأن توزيع الاخطاء في النموذج أعلاه (U_t) ، يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى **(First Order Autorgresive Scheme)** ، أي أن

$$U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t \quad \ldots\ldots (2)$$

حيث

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

وان (ε_t) مستقلة عن (ε_{t-1}) ، بعبارة أخرى

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0$$

من العلاقة رقم (2) أعلاه يمكن الحصول على الاتي:

$$U_{t-1} = \rho U_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \quad \ldots\ldots (3)$$

بالتعويض نحصل على:

$$U_t = \rho(\rho U_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\therefore U_t = \rho^2 U_{t-2} + \rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

وكذلك لدينا

$$U_{t-2} = \rho U_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$

$$\therefore U_t = \rho^2 (\rho U_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \rho \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$U_t = \rho^3 U_{t-3} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

وهكذا بالتعويض المتسلسل للأخطاء الناتجة نحصل على:

$$U_t = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \rho^3 \varepsilon_{t-3} + \quad \ldots\ldots (4)$$

والمتسلسلة رقم (4) أعلاه ، يمكن إعادة كتابتها بالشكل التالي:

$$U_t = \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r \varepsilon_{t-r}$$

وبأخذ التباين للصيغة رقم (4) أعلاه ، علما بأن

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad , \quad E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$$

نحصل على

$$E(U_t^2) = E(\varepsilon_t^2) + \rho^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \rho^4 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \ldots$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \rho^2 \sigma_\varepsilon^2 + \rho^4 \sigma_\varepsilon^2 + \ldots$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 +, \ldots)$$

$$\therefore \sigma_u^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \rho^2) \quad \ldots\ldots (5)$$

أما التباين المشترك (Cov) بين الاخطاء U_{t-1}, U_t فيمكن الوصول اليه بالشكل التالي:

$$U_t = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$$

$$U_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \rho \varepsilon_{t-2} + \rho^2 \varepsilon_{t-3} + \ldots$$

$$\therefore E(U_t U_{t-1}) = E[(\varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots)(\varepsilon_{t-1} + \rho \varepsilon_{t-2} + \rho^2 \varepsilon_{t-3} + \ldots)]$$

وبإعادة ترتب الصيغة أعلاه نحصل على:

$$E(U_t U_{t-1}) = E[\varepsilon_t + \rho(\varepsilon_{t-1} + \rho \varepsilon_{t-2} + \ldots)(\varepsilon_{t-1} + \rho \varepsilon_{t-2} + \ldots)]$$

وبما ان $E(\varepsilon_t) = 0$

$$\therefore E(U_t U_{t-1}) = \rho E(\varepsilon_{t-1} + \rho \varepsilon_{t-2} + \ldots)^2$$

$$E(U_t U_{t-1}) = \rho [E(\varepsilon_{t-1})^2 + \rho^2 E(\varepsilon_{t-2})^2 + \ldots]$$

$$E(U_t U_{t-1}) = \rho [\sigma_\varepsilon^2 + \rho^2 \sigma_\varepsilon^2 + \ldots]$$

$$E(U_t U_{t-1}) = \rho \, \sigma_\varepsilon^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots)$$

$$\therefore E(U_t U_{t-1}) = \frac{\rho \sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2} \quad \ldots\ldots (6)$$

وبمقارنة العلاقة رقم (6) مع العلاقة رقم (5) السابقة الذكر نجد أن:

$$E\left(U_t\,U_{t-1}\right)=\rho\sigma_u^2 \quad \text{(7)}$$

والعلاقة رقم (7) أعلاه يمكن ان توضع بشكل عام كالاتي:

$$E\left(U_t\,U_{t-s}\right)=\rho^s\,\sigma_u^2 \quad \text{(8)}$$

$$S=0,\,1,\,2,\,3,\,...,\,n-1$$

في حالة أن تكون قيمة S=0 ، نحصل على

$$E\left(U_t\,U_{t-o}\right)=E\left(U_t\,U_t\right)=E\left(U_t^2\right)=\sigma_u^2$$

في حالة S=1

$$E\left(U_t\,U_{t-1}\right)=\rho\,\sigma_u^2$$

وفي حالة S=2

$$E\left(U_t\,U_{t-2}\right)=\rho^2\,\sigma_u^2$$

وهكذا $\vdots$

$$E\left(U_t\,U_{t-(n-1)}\right)=\rho^{n-1}\,\sigma_u^2$$

وبجمع هذه الحدود في مصفوفة تباين الاخطاء في حالة النموذج الخطي العام

$$E\left(U\,U'\right)=\begin{bmatrix} E\left(U_1^2\right) & E\left(U_1\,U_2\right) & E\left(U_1\,U_3\right)\,... & E\left(U_1\,U_n\right) \\ E\left(U_2\,U_1\right) & E\left(U_2^2\right) & E\left(U_2\,U_3\right)\,... & E\left(U_2\,U_n\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E\left(U_n\,U_1\right) & E\left(U_n\,U_2\right) & E\left(U_n U_3\right)\,... & E\left(U_n^2\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \rho\,\sigma_u^2 & \rho^2\,\sigma_u^2\,... & \rho^{n-1}\,\sigma_u^2 \\ \rho\,\sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \rho\,\sigma_u^2\;... & \rho^{n-2}\,\sigma_u^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho^{n-1}\,\sigma_u^2 & \rho^{n-2}\,\sigma_u^2 & \rho^{n-3}\,\sigma_u^2\;... & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore E\left(U\,U'\right)=\sigma_u^2\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2\,... & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho\;... & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3}\,... & 1 \end{bmatrix}$$

$$E\left(U\,U'\right)=\sigma_u^2\,\Omega$$

فمثلا لعينة ذات حجم n=2

$$\Omega_{2\times2}=\begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \Omega^{-1}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}1 & -\rho\\ -\rho & 1\end{bmatrix}$$

أما إذا كان حجم العينة **n=3**

$$\Omega_{3\times3}=\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2\\ \rho & 1 & \rho\\ \rho^2 & \rho & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \Omega^{-1}=\frac{\text{adj}\Omega}{|\Omega|}$$

حيث أن

$$adj\Omega=\begin{bmatrix}1-\rho^2 & -\rho+\rho^3 & 0\\ -\rho+\rho^3 & 1-\rho^4 & -\rho+\rho^3\\ 0 & -\rho+\rho^3 & 1-\rho^2\end{bmatrix}$$

وأن قيمة محددها يعطى كآلاتي:

$$|\Omega|=1+\rho^4+\rho^4-\rho^4-\rho^2-\rho^2$$

$$|\Omega|=1-2\rho^2+\rho^4=\left(1-\rho^2\right)^2$$

$$\therefore \Omega^{-1}=\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)^2}\begin{bmatrix}1-\rho^2 & -\rho+\rho^3 & 0\\ -\rho+\rho^3 & 1-\rho^4 & -\rho+\rho^3\\ 0 & -\rho+\rho^3 & 1-\rho^2\end{bmatrix}$$

وبالتعديل نحصل على:

$$\Omega^{-1}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}1 & -\rho & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho\\ 0 & -\rho & 1\end{bmatrix}$$

وبشكل عام ولحجم عينة **(n)** ، يمكن كتابة معكوس مصفوفة (Ω) بالشكل التالي:

$$\Omega^{-1}_{n\times n}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1\end{bmatrix}$$

ويمكن استخراج مصفوفة Ω^{-1} المطلوبة ، مباشرة وذلك بحذف $\left(\rho^2\right)$ من العنصر الأخير للصف الاخير أو العمود الأخـير ، فمثلا $\left(\Omega^{-1}\right)$ ذات حجم (2×2) تكون كالاتي:

$$\Omega_{2\times 2}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

وهكذا لاي حجم من معكوس مصفوفة (Ω) ، علما بأن أي حجم مصفوفة مقتطعة مـن $\left(\Omega^{-1}\right)$، يكـون عنـاصر الصـف الأول لها مطابق لعناصر الصف الأخير مع تغيير مواقع هذه العناصر، وهي مصفوفة مربعة وذات رتبة مسـاوية إلى حجـم العينة المدروس ، ويمكن النظر إليها باستثناء الصف الاول والاخير منها ، بأنها مصفوفة قطرية بثلاثة عنـاصر وهـي $-\rho$ و $1+\rho^2$ و $-\rho$.

4.3 تقديرات المربعات الصغرى العامة

بعد تحديد مصفوفة مثل (T)لتنقية مشاه $Y = X\beta + U$

علما بأن مصفوفة (T) بشكل عام ولعينة ذات حجم (n) تكتب كالاتي:

$$T_{n\times n} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix} \quad \text{.......... (9)}$$

بحيث أن:

دات العينة من أثر وجود الارتباط الذاتي ، وبالتالي تقدير معالم النموذج الخطي العام التالي:

$$T'T = \left(1-\rho^2\right)\Omega^{-1}$$

$$\therefore \Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} T'T$$



في ظل فرضية وجود الارتباط الذاتي ، يمكن وضع مجموع مربعات الاخطاء للنموذج الخطي العام أعلاه بالشكل التالي:

$$U'\Omega^{-1}U = (Y - X\beta)'\,\Omega^{-1}(Y - X\beta)$$

$$= Y'\Omega^{-1}Y - Y'\Omega^{-1}X\beta - \beta'X'\Omega^{-1}Y + \beta'X'\Omega^{-1}X\beta$$

$$U'\Omega^{-1}U = Y'\Omega^{-1}Y - 2\beta'X'\Omega^{-1}Y + \beta'X'\Omega^{-1}X\beta$$

وبأخذ التفاضل الجزئي الأول بالنسبة لموجه المعالم المطلوب تقديره

$$\frac{\partial\left(\mathbf{U}'\Omega^{-1}\mathbf{U}\right)}{\partial\beta'} = -2\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\mathbf{b}_{GLS} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\mathbf{b}_{GLS}$$

$$\therefore \mathbf{b}_{GLS} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_k \end{bmatrix}_{GLS} = \left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{Y}$$

صيغة التقدير أعلاه ، تعرف بصيغة تقدير أتكن (**Aitken estimator**) ، ويسمى هذا الاسلوب في التقدير بطريقة المربعات الصغرى العامة (**Generalized Least Square**) (**GLS**)،ويمكن بيان أن التقديرات الحاصل عليها باسلوب (**GLS**) تكون غير متحيزة.

$$\mathbf{b}_{GLS} = \left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{Y}$$

$$= \left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\left[\mathbf{X}\beta + \mathbf{U}\right]$$

$$= \left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\beta + \left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{U}$$

$$= \beta + \left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{U}$$

$$\therefore \mathbf{E}\left(\mathbf{b}_{GLS}\right) = \beta$$

وذلك لان $\mathbf{E}\left(\mathbf{U}\right) = \mathbf{0}$

أما مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة بطريقة (**GLS**) ، يمكن الوصول إليها مباشرة بالشكل التالي، من أعلاه لدينا

$$\mathbf{b}_{GLS} - \beta = \left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{U}$$

بالتعويض في الصيغة العامة للتباين والتباين المشترك ، أي أن

$$\mathbf{Var - Cov}\left(\mathbf{b}_{GLS}\right) = \mathbf{E}\left[\left(\mathbf{b}_{GLS} - \beta\right)\left(\mathbf{b}_{GLS} - \beta\right)'\right]$$

$$= \mathbf{E}\left\{\left[\left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{U}\right]\left[\left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{U}\right]'\right\}$$

$$= \left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{E}\left(\mathbf{U}\mathbf{U}'\right)\Omega^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$= \left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\sigma_u^2\,\Omega\,\Omega^{-1}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$\therefore \mathbf{Var - Cov}\left(\mathbf{b}_{GLS}\right) = \sigma_u^2\left(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$$

المصفوفة أعلاه مربعة ومتماثلة ، عناصر القطر فيها تمثل تباين المعالم أي $Var(b_j)$ ، $j=0, 1, ..., k$ ، في حين العناصر خارج نطـاق القطـر تمثـل التبـاين المشـترك بـين هـذه المعـالم أي $Cov\ (b_i\ b_j)$ ، $i,\ j=0,\ 1,\ 2,...,\ k$ بحيـث ان $i \neq j$ وأن $E\left(S_e^2\right)=\sigma_u^2$ ، حيث يتم تقدير تباين العينة في ظل وجود الارتباط الذاتي بالشكل التالي:

$$S_e^2 = \frac{e'\Omega^{-1}e}{n-k-1} \quad \text{.........} (10)$$

حيث ان:

n تمثل حجم العينة

k تمثل عدد المتغيرات المستقلة

e تمثل موجه للأخطاء الناتجة من الفرق بين العينة المشاهدة والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد .

في الجانب التطبيقي، يفضل استخدام مشاهدات العينة مباشرة في تقدير تباين العينة $\left(S_e^2\right)$ ، حيث يتم تحليـل بسط الصيغة رقم (10) أعلاه كالاتي:

$$e'\Omega^{-1}e = \left(Y - Xb_{GLS}\right)'\left(Y - Xb_{GLS}\right)$$

$$= Y'\Omega^{-1}Y - Y'\Omega^{-1}Xb_{GLS} - b'_{GLS}X'\Omega^{-1}Y + b'_{GLS}X'\Omega^{-1}Xb_{GLS}$$

بالتعويض عن موجه (b_{GLS}) بصيغته التقديرية نحصل على

$$e'\Omega^{-1}e = Y'\Omega^{-1}Y - b'_{GLS}X'\Omega^{-1}Y$$

$$\therefore S_e^2 = \frac{Y'\Omega^{-1}Y - b'_{GLS}X'\Omega^{-1}Y}{n-k-1}$$

وبأتباع نفس الاسلوب في الفصل الثاني، يمكن الاثبات بأن تباين العينـة $\left(S_e^2\right)$ ، تقـدير غـير متحيـز في ظـل وجـود الارتبـاط الذاتي.

4.4 مقارنة بين طريقتي (OLS) و (GLS) (كفاءة التقدير)

لتوضيح مقدار الخطأ الناتج عند استخدام طريقة (OLS) مباشرة لتقدير معالم العلاقة مـن عينـة عشـوائية تعـاني مشاهدتها مـن وجـود مشـكلة الارتبـاط الـذاتي ، ولنأخـذ النمـوذج التـالي والمقـاس بالانحرافـات وحجـم عينـة ذات ثلاثـة مشاهدات ، n=3 .

$$y_t = \beta_1 x_t + U_t$$

$$U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) , \quad E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}\right) = 0 \quad \forall \quad t \neq t'$$

وكما هو معلوم في الفصل السابق عند قياس كفاءة التقدير في حالة تطبيق طريقة (OLS) مباشرة على مشـاهدات العينـة ، تأخذ صيغة التباين والتباين المشترك لهذه المعالم الشكل التالي:

$$Var - Cov(b) = Var\left(b_1\right) = \left(X'X\right)^{-1} X' \sigma_u^2 \Omega X \left(X'X\right)^{-1}$$

$$\therefore Var\left(b_1\right) = \left(\left[x_1 x_2 x_3\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)^{-1} \left[x_1 x_2 x_3\right]\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\left(\left[x_1 x_2 x_3\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)^{-1} \sigma_u^2$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{\sum x_t^2}\left(x_1^2 + \rho x_1 x_2 + \rho^2 x_1 x_3 + \rho x_1 x_2 + x_2^2 + \rho x_2 x_3 + \rho^2 x_1 x_3 + \rho x_2 x_3 + x_3^2\right)\frac{1}{\sum x_t^2}$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{\sum x_t^2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\rho\left(x_1 x_2 + x_2 x_3\right) + 2\rho^2 x_1 x_3\right)\frac{1}{\sum x_t^2}$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{\sum x_t^2}\left(\sum_{t=1}^{n} x_t^2 + 2\rho \sum_{t=1}^{n-1} x_t x_{t+1} + 2\rho^2 \sum_{t=1}^{n-2} x_t x_{t+2}\right)\frac{1}{\sum x_t^2}$$

$$Var\left(b_1\right)_{LS} = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_t^2}\left(1 + \frac{2\rho \sum_{t=1}^{n-1} x_t x_{t+1}}{\sum x_t^2} + \frac{2\rho^2 \sum_{t=1}^{n-2} x_t x_{t+2}}{\sum x_t^2}\right) \quad \text{.........} (11)$$

يتضح من العلاقة أعلاه ، بأن الحد الأول منها يمثل التباين للميـل الحـدي المقـدر بطريقـة (OLS) ، زائـدا مقـدار موجب متمثلا في الحد الثاني والثالث ، أي أن تباين الميل الحدي لهذه العلاقة قد ارتفع عما يجب أن يكـون عليـه في حالـة الـ (OLS) وذلك طبعا عائد إلى تطبيق طريقة (OLS) على بيانات عينة أساسا تتضمن وجود ارتباط ذاتي.

أما تباين الميل الحدي للنموذج المدروس عند تطبيق طريقة (GLS) على بيانات هـذه العينـة ، فيعطـى بموجـب الصيغة التالية:

$$Var-Cov(b_{GLS})=Var(b_1)_{GLS}=\sigma_u^2\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}$$

وبذلك يستوجب حساب مصفوفة (Ω) ومن ثم (Ω^{-1}) أي

$$\Omega_{3\times3}=\begin{bmatrix}1&\rho&\rho^2\\\rho&1&\rho\\\rho^2&\rho&1\end{bmatrix}\quad,\quad\Omega_{3\times3}^{-1}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}1&-\rho&0\\-\rho&1+\rho^2&-\rho\\0&-\rho&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore Var(b_1)_{GLS}=\left([x_1x_2x_3]\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}1&-\rho&0\\-\rho&1+\rho^2&-\rho\\0&-\rho&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)^{-1}\sigma_u^2$$

$$=(1-\rho^2)\left(\left[(x_1-\rho x_2)\ (-\rho x_1+x_2+\rho^2x_2-\rho x_3)\ (-\rho x_2-\rho x_3)\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)^{-1}\sigma_u^2$$

$$=\sigma_u^2(1-\rho^2)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-2\rho(x_1x_2+x_2x_3)+\rho^2x_2^2\right)^{-1}$$

$$\therefore Var(b_1)_{GLS}=\sigma_u^2(1-\rho^2)\left(\sum_{t=1}^{n}x_t^2-2\rho\sum_{t=1}^{n-1}x_tx_{t+1}+\rho^2\sum_{t=1}^{n-2}x_{t+1}^2\right)^{-1}\ ....(12)$$

الصيغة رقم (12) أعلاه ، تبين أن تباين الميل الحد (b_1) المقدربطريقـة (GLS) ، وبمقارنتهـا مـع الصـيغة رقـم (11) يمكن إيجاد كفاءة التقدير ، حيث أن صيغة الكفاءة النسبية تعطى بشكل عام وكالاتي:

$$efficiency(b_j)=\frac{Var(b_j)_{GLS}}{Var(b_j)_{OLS}}\quad,\quad j=0,1,2,\dots,k$$

وبالنسبة لمثالنا السابق

$$efficiency(b_1)=\frac{Var(b_i)_{GLS}}{Var(b_i)_{OLS}}$$

$$\therefore eff(b_1)=\frac{\sigma_u^2(1-\rho^2)\left(\sum_{t=1}^{n}x_t^2-2\rho\sum_{t=1}^{n-1}x_tx_{t+1}+\rho^2\sum_{t=1}^{n-2}x_{t+1}^2\right)^{-1}}{\frac{\sigma_u^2}{\sum_{t=1}^{n}x_t^2}\left(1+\frac{2\rho\sum_{t=1}^{n-1}x_tx_{t+2}}{\sum_{t=1}^{n}x_t^2}+\frac{2\rho\sum_{t=1}^{n-2}x_tx_{t+2}}{\sum_{t=1}^{n}x_t^2}\right)}$$

وبافتراض تساوي تباين العينة في حالة التجانس وفي حالة وجود الارتباط الذاتي نحصل على:

$$\text{eff}(b_1)=\frac{(1-\rho^2)}{\frac{1}{\sum_{t=1}^{n}x_t^2}\left(\sum_{t=1}^{n}x_t^2-2\rho\sum_{t=1}^{n-1}x_t\,x_{t+1}+\rho^2\sum_{t=1}^{n-2}x_{t+1}^2\right)\cdot\left(1+\frac{2\rho\sum_{t=1}^{n-1}x_tx_{t+2}}{\sum_{t=1}^{n}x_t^2}+\frac{2\rho^2\sum_{t=1}^{n-2}x_tx_{t+1}}{\sum_{t=1}^{n}x_t^2}\right)}$$

علما بأن $x_t = X_t - \vec{X}$ ، وفي حالة العينات الكبيرة يمكن إعادة كتابة الصيغة أعلاه كآلاتي:

$$\text{eff}(b_1)=\frac{(1-\rho^2)}{\left[1-2\rho\frac{Cov(x_tx_{t+1})}{var(x_t)}+\rho^2\frac{Var(x_{t+1})}{Var(x_t)}\right]\left[1+\frac{2\rho Cov(x_t\,x_{t+1})}{Var(x_t)}+\frac{2\rho^2Cov(x_tx_{t+2})}{Var(x_t)}\right]}$$

الحد الأخير من مقام الصيغة أعلاه ، ما هو إلا عبارة عن (ρ^2) ، عليه فإن

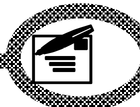
$$\text{eff}(b_1)=\frac{(1-\rho^2)}{(1-2\rho.\rho+\rho^2)(1+2\rho.\rho+2\rho^2\rho^2)}$$

$$=\frac{(1-\rho^2)}{(1-2\rho^2+\rho^2)(1+2\rho^2+2\rho^4)}$$

$$=\frac{(1-\rho^2)}{(1-\rho^2)(1+2\rho^2+2\rho^4)}$$

$$\therefore \text{eff}(b_1)=\frac{1}{1+2\rho^2+2\rho^4}<1$$

النتيجة أعلاه أقل من الواحد الصحيح ، وهذا بدوره يعني بأن تباين $(b_1)_{LS}$ أكبر من تباين $(b_1)_{GLS}$، أي ان طريقة (GLS) أكثر كفاءة من طريقة (OLS).



مثال تطبيقي (1)

عينة عشوائية ذات أربعة مشاهدات ، وجد بأن خطأ النموذج المقترح التالي:

$$Y_t=\beta_0+\beta_1X_t+U_t$$

يتوزع بالشكل التالي:

$$U_t \sim N(0\ ,\ 2.25\Omega)$$

وان (U_t) يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى.

$$U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث ان $\hat{\rho} = -0.9$

والبيانات الخاصة بالمتغير المعتمد والمستقل كالاتي:

$t =$	1	2	3	4
$Y_t =$	0	−1	0	0
$X_t =$	0	0	0	1

المطلوب:

1. قدر معالم العلاقة الخطية بين Y_t و X_t مستخدما:

a) OLS ، b) GLS

2. احسب مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة مستخدما كذلك:

a) OLS ، b) GLS

3. ما هي كفاءة تقدير هذه المعالم باستخدام (GLS) نسبة إلى (OLS).

الحل:

1. استخدام اسلوب (OLS)

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_{LS} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_t = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} X_t$$

$$\text{Var} \hat{-} \text{Cov}(b) = \text{Var} \hat{-} \text{Cov}\left(\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}\right) = S_e^2 (X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^2 & \hat{\rho}^3 \\ \hat{\rho} & 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^2 \\ \hat{\rho}^2 & \hat{\rho} & 1 & \hat{\rho} \\ \hat{\rho}^3 & \hat{\rho}^2 & \hat{\rho} & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض عن قيمة $(\hat{\rho})$ نحصل على

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & (-0.9) & (-0.9)^2 & (-0.9)^3 \\ & 1 & (-0.9) & (-0.9)^2 \\ & & 1 & (-0.9) \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Var} - \text{Cov}(b) = (2.25)\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.38 & 0.18 \\ 0.18 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Var} \hat{-} \text{Cov}(b) = \begin{bmatrix} 0.26 & -0.87 \\ -0.87 & 3.74 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\text{Var}}(b_0) = 0.26 \qquad \hat{\text{Cov}}(b_0 b_1) = -0.87 \qquad \hat{\text{Var}}(b_1) = 3.74$$

2. تقدير المعالم باستخدام (GLS)

$$b_{GLS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{GLS} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X'\Omega^{-1} Y$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & (-0.9) & (-0.9)^2 & (-0.9)^3 \\ & 1 & (-0.9) & (-0.9)^2 \\ & & 1 & (-0.9) \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\hat{\rho}^2}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho} & 0 & 0 \\ -\hat{\rho} & 1+\hat{\rho}^2 & -\hat{\rho} & 0 \\ 0 & -\hat{\rho} & 1+\hat{\rho}^2 & -\hat{\rho} \\ 0 & 0 & -\hat{\rho} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{-1}=\frac{1}{1-(-0.9)^2}\begin{bmatrix}1 & 0.9 & 0 & 0\\ 0.9 & 1.81 & 0.9 & 0\\ 0 & 0.9 & 1.81 & 0.9\\ 0 & 0 & 0.9 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Omega^{-1}=\frac{1}{0.19}\begin{bmatrix}1 & 0.9 & 0 & 0\\ 0.9 & 1.81 & 0.9 & 0\\ 0 & 0.9 & 1.81 & 0.9\\ 0 & 0 & 0.9 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\frac{1}{0.19}\begin{bmatrix}1 & 0.9 & 0 & 0\\ 0.9 & 1.81 & 0.9 & 0\\ 0 & 0.9 & 1.81 & 0.9\\ 0 & 0 & 0.9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}=0.19\begin{bmatrix}11.02 & 1.9\\ 1.9 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{0.19}{7.41}\begin{bmatrix}1 & -1.9\\ -1.9 & 11.02\end{bmatrix}$$

$$X'\Omega^{-1}Y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{0.19}\begin{bmatrix}1 & 0.9 & 0 & 0\\ 0.9 & 1.81 & 0.9 & 0\\ 0 & 0.9 & 1.81 & 0.9\\ 0 & 0 & 0.9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$X'\Omega^{-1}Y=\frac{1}{0.19}\begin{bmatrix}-3.61\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{GLS}\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}Y=\frac{0.19}{(0.19)(7.41)}\begin{bmatrix}1 & -1.9\\ -1.9 & 11.02\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3.61\\ 0\end{bmatrix}$$

$$b_{GLS}=\frac{1}{7.41}\begin{bmatrix}1 & -1.9\\ -1.9 & 11.02\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3.61\\ 0\end{bmatrix}$$

$$b_{GLS}=\begin{bmatrix}-0.487\\ 0.9256\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}-0.49\\ 0.93\end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_t=-0.49+0.93\ X_i$$

$$Var\hat{-}Cov\left(b_{GLS}\right)=Var\hat{-}Cov\left(\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\end{bmatrix}\right)=S_e^2\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}$$

$$=2.25\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{0.19}\begin{bmatrix}1 & 0.9 & 0 & 0\\ 0.9 & 1.81 & 0.9 & 0\\ 0 & 0.9 & 1.81 & 0.9\\ 0 & 0 & 0.9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$=(2.25)(0.19)\begin{bmatrix}11.02 & 1.9\\ 1.9 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{Var}\hat{-}\text{Cov}(b_{GLS}) = \frac{(2.25)(0.19)}{7.41}\begin{bmatrix} 1 & -1.9 \\ -1.9 & 11.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.11 \\ -0.11 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{\text{Var}}(b_0) = 0.06 \;,\; \hat{\text{Var}}(b_1) = 0.64 \;,\; \hat{\text{Cov}}(b_0, b_1) = -0.11$$

وبالتالي يمكن حساب كفاءة التقدير (GLS) نسبة إلى (OLS) في ظل وجود الارتباط الذاتي وكالاتي:

$$\text{eff}(b_0) = \frac{\text{Var}(b_0)\text{ in GLS}}{\text{Var}(b_0)\text{ in OLS}} = \frac{0.06}{0.26} = 0.22$$

$$\text{eff}(b_1) = \frac{\text{Var}(b_1)\text{ in GLS}}{\text{Var}(b_1)\text{ in OLS}} = \frac{0.64}{3.74} = 0.17$$

من النتائج أعلاه يتبين ان طريقة GLS أكثر كفاءة من OLS ، بعبارة اخرى لو اتبعت طريقة (OLS) في تقدير معالم هذا النموذج التي تتضمن بياناته وجود ارتباط ذاتي ، لحصلنا على تقدير لهذه المعالم مقدار دقتها لا تتعدى (0.22) بالنسبة للحد الثابت و (0.17) بالنسبة للميل الحدي من التقدير باستخدام (GLS) .

وتجدر الاشارة هنا إلى أنه يمكن الحصول على نفس التقديرات أعلاه لمعالم النموذج المدروس ، وذلك باتباع اسلوب اخر يعرف باسلوب ذات المرحلتين ، أو ذات الخطوتين (Two Step Procedure) (2SP) ويتلخص هذا الاسلوب باستبعاد اثر الارتباط الذاتي من كل مشاهدة من مشاهدات العينة المدروسة ، ثم بعد ذلك تطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية مباشرة على البيانات التي تم استبعاد أثر الارتباط الذاتي منها . ويتم تحويل بيانات أو مشاهدات كل من المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة بموجب المصفوفة (T) المعرفة في بداية هذا الفصل والمعاد كتابتها لحجم عينة عشوائية (n) وكالاتي:

$$T_{(n\times n)} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

وبما ان حجم العينة في المثال السابق (n=4) ، لذا فإن مصفوفة (T) سوف تاخذ الشكل التالي:

$$T_{(4\times 4)} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\hat{\rho}^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{\rho} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\rho} & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض عن قيمة $(\hat{\rho})$ المعطاة قي السؤال ،نحصل على

$$\mathbf{T}_{(4\times4)} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يمكن استخدام المصفوفة أعلاه ، لاستبعاد أثر الارتباط الذاتي من مشاهدات المتغير المعتمد ، وذلك بضربها في موجه المتغير المعتمد وكالاتي:

$$\mathbf{T\,Y} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -0.9 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^*$$

أما المتغيرات المستقلة فيتم استبعاد أثر الارتباط الذاتي منها بواسطة ضرب المصـفوفة (T) في مصـفوفة المتغـيرات المستقلة:

$$\mathbf{T\,X} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0 \\ 1.9 & 0 \\ 1.9 & 0 \\ 1.9 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^*$$

عليه يمكن تقدير معالم النموذج المدروس باتباع طريقة OLS مباشرة وكما يلي:

$$\mathbf{b}_{2SP} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*\right)^{-1} \mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{Y}^*$$

$$\mathbf{b}_{2SP} = \left(\begin{bmatrix} 0.44 & 1.9 & 1.9 & 1.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.44 & 0 \\ 1.9 & 0 \\ 1.9 & 0 \\ 1.9 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 0.44 & 1.9 & 1.9 & 1.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -0.9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{2SP} = \begin{bmatrix} 11.02 & 1.9 \\ 1.9 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3.61 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{b}_{2SP} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}_{2SP} = \frac{1}{7.41} \begin{bmatrix} 1 & -1.9 \\ -1.9 & 11.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.61 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.49 \\ 0.93 \end{bmatrix}$$

وهو نفس التقدير السابق والذي تم الحصول عليه بموجب تطبيق الصيغة العامة لاسـلوب (GLS)، أي أن $\mathbf{b}_{2SP} = \mathbf{b}_{GLS}$

.

وبما ان حاصل ضرب المصفوفة (T) بالمبدلة لها يعطي الاتي ، $T'T = (1-\rho^2)\Omega^{-1}$ ، لذا يجب ترجيح مصفوفة المعلومات $\left(X^{*'}X^{*}\right)$ والحاصل عليها بموجب اسلوب (2SP) بالمقدار $(1-\hat{\rho}^2)$ ، أي ان

$$Var \hat{-} Cov(b_{GLS}) = \sigma_u^2 \left(X' \Omega^{-1} X\right)^{-1}$$

$$= \sigma_u^2 \left(X' \frac{T'T}{1-\rho^2} X \right)^{-1}$$

$$\therefore Var - Cov(b)_{GLS} = \sigma_u^2 (1-\rho^2)(X' T' T X)^{-1}$$

$$= \sigma_u^2 (1-\rho^2)\left[(TX)'(TX)\right]^{-1}$$

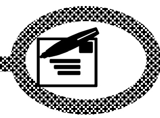
$$= \sigma_u^2 (1-\rho^2)\left(X^{*'}X^{*}\right)^{-1} = Var - Cov(b)_{2SP}$$

وبما ان $E(S_e^2) = \sigma_u^2$ ، عليه فإن مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة بأسلوب $(2SP)$ لمثالنا أعلاه تكون كالاتي :

$$Var - Cov(b)_{2SP} = 2.25(0.19)\begin{bmatrix} 11.02 & -1.9 \\ 1.9 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$Var \hat{-} Cov\left(\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{2SP}\right) = \frac{2.25(0.19)}{7.41}\begin{bmatrix} 1 & -1.9 \\ -1.9 & 11.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.11 \\ -0.11 & 0.64 \end{bmatrix}$$

وهي نفس النتيجة السابقة.



مثال تطبيقي (2)

عينة عشوائية ذات خمسة مشاهدات ، اخذ فيها كل من المتغير المعتمد والمتغير المستقل المشاهدات التالية:

Y_t=1 , 3 , 2 , 1 , 0

X_t=2 , 5 , 4 , 3 , 1

<u>المطلوب:</u>

1. تقدير معالم النموذج التالي

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t$$

علما بأن

$$U_t \sim N\left(0, \sigma_u^2 \Omega\right)$$

وان (U_t) يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى ، بقيمة تقديرية مساوية إلى $\hat{\rho} = -0.7$

2. تقدير مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة.
3. تحقيق النتائج أعلاه باستخدام اسلوب ذات المرحلتين أو الخطوتين (2SP) .

الحل:

تقدير المعالم وحساب مصفوفة التباين والتباين المشترك

$$b_{GLS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{GLS} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-0.49}\begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1.49 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1.49 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 1.49 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} = \left(\frac{1}{0.51}\begin{bmatrix} 12.07 & 39.78 \\ 39.78 & 142.5 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \frac{0.51}{137.5266}\begin{bmatrix} 142.5 & -39.78 \\ -39.78 & 12.07 \end{bmatrix}$$

$$= 0.51\begin{bmatrix} 1.036163186 & -0.289253133 \\ -0.289253133 & 0.087764839 \end{bmatrix}$$

أما

$$X'\Omega^{-1}Y = \frac{1}{0.51}\begin{bmatrix} 19.04 \\ 71.54 \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{GLS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{GLS} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y$$

$$\mathbf{b}_{GLS} = \frac{0.51}{0.51}\begin{bmatrix} 1.036163186 & -0.289253133 \\ -0.289253133 & 0.087764839 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19.04 \\ 71.54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.964622075 \\ 0.77131693 \end{bmatrix}$$

ومنه يمكن وضع الصيغ التقديرية للنموذج المدروس كالاتي:

$$\hat{Y}_t = -0.9646 + 0.7713X_t$$

وكذلك

$$Var \hat{-} Cov(b) = S_e^2 \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}$$

حيث ان

$$S_e^2 = \frac{Y'\Omega^{-1}Y - b'X'\Omega^{-1}Y}{n-k-1}$$

علما بأن

$$Y'\Omega^{-1}Y = \frac{37.26}{0.51} = 73.05882353$$

$$b'X'\Omega^{-1}Y = \begin{bmatrix} -0.9646 & 0.7713 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 37.3333 \\ 140.2745 \end{bmatrix} = 72.18202067$$

$$\therefore S_e^2 = \frac{73.05882353 - 72.18202067}{5-1-1} = 0.29226762$$

$$\therefore Var \hat{-} Cov(b) = (0.29226762)\begin{bmatrix} 0.528443224 & -0.14759097 \\ -0.147519097 & 0.04476008 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.154446843 & -0.043115055 \\ -0.043115055 & 0.013081918 \end{bmatrix}$$

$$\therefore V\hat{a}r(b_0) = 0.154446843, \quad V\hat{a}r(b_1) = 0.013081918, \quad C\hat{o}v(b_0\ , b_1) = -0.04311505$$

لغرض تحقيق النتائج أعلاه ، لا بد من تطبيق اسلوب ذات الخطوتين (المرحلتين) (2SP) ، وعليه يستوجب تحديد مصـفوفة (T) وكالاتي:

$$T_{(5\times5)} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\hat{\rho}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{\rho} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\rho} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{\rho} & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض في قيمة $(\hat{\rho})$ نحصل على:

$$T_{(5\times5)}=\begin{bmatrix}0.7141&0&0&0&0\\0.7&1&0&0&0\\0&0.7&1&0&0\\0&0&0.7&1&0\\0&0&0&0.7&1\end{bmatrix}$$

وبالتالي يمكن استخدام المصفوفة أعلاه ، لتنقية بيانات كل من المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة من أثـر وجـود الارتبـاط الذاتي وبالشكل التالي:

$$TY=\begin{bmatrix}0.7141&0&0&0&0\\0.7&1&0&0&0\\0&0.7&1&0&0\\0&0&0.7&1&0\\0&0&0&0.7&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.715\\3.7\\4.1\\2.4\\0.7\end{bmatrix}=Y^*$$

$$TX=\begin{bmatrix}0.7141&0&0&0&0\\0.7&1&0&0&0\\0&0.7&1&0&0\\0&0&0.7&1&0\\0&0&0&0.7&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&5\\1&4\\1&3\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7141&1.4282\\1.7&6.4\\1.7&7.5\\1.7&5.8\\1.7&5.1\end{bmatrix}=X^*$$

$$\therefore b_{2SP}=\begin{bmatrix}b_0\\b_1\end{bmatrix}_{2SP}=\left(X^{*\prime}X^*\right)^{-1}X^{*\prime}Y^*$$

حيث ان

$$(X^{*\prime}X^*)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}0.7141&1.7&1.7&1.7&1.7\\1.4282&6.4&7.5&5.8&3.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7141&1.4282\\1.7&6.4\\1.7&7.5\\1.7&5.8\\1.7&3.1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\therefore\left(X^{*\prime}X^*\right)^{-1}=\begin{bmatrix}12.06993881&39.77987762\\39.77987762&142.4997552\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1.03617601&-0.28925632\\-0.28925632&0.087765631\end{bmatrix}$$

وان

$$X^{*\prime}Y^*=\begin{bmatrix}0.7141&1.7&1.7&1.7&1.7\\1.4282&6.4&7.5&5.8&3.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7141\\3.7\\4.1\\2.4\\0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19.03993881\\71.53987762\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{2SP} = \begin{bmatrix} 1.03617601 & -0.28925632 \\ -0.28925632 & 0.087765631 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.0399388 \\ 71.53987762 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9646339 \\ 0.771319868 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$Var \hat{-} Cov(b)_{2SP} = S_e^2 \left(1-\hat{\rho}^2\right)\left(X^{*\prime} X^*\right)^{-1}$$

علما بأن

$$S_e^2 = \frac{Y^{*\prime} Y^* - b'_{2SP} X^{*\prime} Y^*}{\left(1-\rho^2\right)\left(n-k-1\right)} = 0.291751828$$

وهو مطابق لتباين العينة المقدر بأسلوب (GLS).

$$\therefore Var \hat{-} Cov(b)_{2SP} = (0.291752)(0.51). \begin{bmatrix} 1.03617601 & -0.28925632 \\ -0.28926532 & 0.087765631 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.154448755 & -0.04311553 \\ -0.04311553 & 0.013082036 \end{bmatrix}$$

يتضح من مقارنة النتائج الحاصل عليها من تطبيق الأسلوبين أعلاه ، بأن التقديرات متطابقة.

4.5 طرق تقدير قيمة الارتباط الذاتي (ρ)

لا بد من معرفة قيمة الارتباط الذاتي ، على الأقل الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى وبالتالي إمكانية تطبيق طريقة المربعات الصغرى العامة (GLS) لتقدير معالم النموذج المدروس وهناك عدة طرق نستعرض اثنين منها فقط.

1. طريقة التكرار Iterative Method

بموجب هذه الطريقة ، نبتدأ باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لتقدير معالم النموذج ولغرض الايضاح نفرض بأن النموذج متضمنا متغير مستقل واحد وكالاتي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t$$

حيث يتم الحصول على تقدير للحد الثابت والميل الحدي للنموذج أعلاه باتباع طريقة (OLS) وكالاتي:

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 X_t$$

وباستخدام النموذجين يمكن الحصول على الاخطاء الناتجة من الفرق بين القيمة المشاهدة والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد.

$$Y_t - \hat{Y}_t = e_t$$

ومن الفروق الاولى للاخطاء العشوائية يمكن تقدير معامل الارتباط الذاتي ، أي أن:

$$e_t = \rho e_{t-1} + \varepsilon_t$$

بتطبيق اسلوب (OLS) لتقدير (ρ) ، التقدير حول نقطة المتوسط.

$$\sum \varepsilon_t^2 = \sum \left(e_t - \rho e_{t-1}\right)^2$$

$$\therefore \frac{\partial \sum \varepsilon^2}{\partial \rho} = \sum e_t e_{t-1} - \hat{\rho} \sum e_{t-1}^2 = 0$$

$$\therefore \hat{\rho} = \frac{\sum e_t \, e_{t-1}}{\sum e_{t-1}^2} \quad \text{......(13)}$$

حيث ان:

$$t=2, 3, \ldots, n$$

وبعد معرفة قيمة الارتباط الذاتي يمكن تحويل بيانات كل من المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة بالشكل التالي:

$$Y_t - \hat{\rho}\, Y_{t-1} = b_0 \left(1-\hat{\rho}\right) + b_1\left(X_t - \hat{\rho}\, X_{t-1}\right) + \left(1-\hat{\rho}\right) U_t$$

$$Y_t^* = b_0^* + b_1 X_t^* + U_t^* \quad \text{......(14)}$$

حيث ان:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho}\, Y_{t-1} \quad , \quad X_t^* = X_t - \hat{\rho}\, X_{t-1}$$

$$b_0^* = b_0 \left(1-\hat{\rho}\right), \; U_t^* = \left(1-\hat{\rho}\right) U_t$$

ثم يعاد تقدير معالم النموذج رقم (14) أعلاه أي تقدير خط انحدار $\left(Y_t^*\right)$ على $\left(X_t^*\right)$ حيث نحصل على :

$$\hat{Y}_t^* = \hat{b}_0^* + \hat{b}_1 \, X_t^*$$

ومنه يمكن حساب الاخطاء الثانية وكالاتي:

$$Y_t^* - \hat{Y}_t^* = e_t^*$$

حيث يتم تقدير الارتباط الذاتي من الدرجة الثانية ومن الاخطاء الثانية المؤشرة أعلاه وكالاتي:

$$e_t^* = \hat{\rho}\, e_{t-1}^* + \varepsilon_t$$

مرة اخرى بتطبيق اسلوب (OLS) نصل على:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t^* e_{t-1}^*}{\sum e_{t-1}^{*2}} \quad \text{.......} \quad (15)$$

وبعد ثبوت معنوية الارتباط الذاتي من الدرجة الثانية المحتسب من الصيغة أعلاه ، يتم تنقية مشاهدات كل من المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة بنفس الاسلوب السابق ، وكما يلي :

$$Y_t^* - \hat{\rho}\, Y_{t-1}^* = \hat{b}_0 (1 - \hat{\rho}) + \hat{b}_1 (X_t^* - \hat{\rho}\, X_{t-1}^*) + (1 - \hat{\rho}) U_t$$

وهكذا يعاد هذا الاسلوب في التقدير حتى تتطابق القيم التقديرية لكل من الحد الثابت والميل الحدي للنموذج المدروس في المراحل المتتالية ، عندها يشخص نوعية الارتباط الذاتي بشكل نهائي ويتم اعتماده في عملية التقدير .

2. طريقة ديربن Durban Method

يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي بموجب طريقة ديربن على مرحلتين ، تنطوي المرحلة الاولى على التقدير التالي:

$$(Y_t - \rho\, Y_{t-1}) = \beta_0 (1 - \rho) + \beta_1 (X_t - \rho\, X_{t-1}) + U_t$$

$$Y_t = \beta_0 (1 - \rho) + \rho\, Y_{t-1} + \beta_1 X_t + \beta_1 \rho\, X_{t-1} + U_t$$

$$Y_t = \beta_0^* + \rho\, Y_{t-1} + \beta_1 X_t - \gamma\, X_{t-1} + U_t$$

حيث ان

$$\beta_0^* = \beta_0 (1 - \rho), \ \gamma = \beta_1 \rho$$

يتضح من الصيغة أعلاه بأن هناك ثلاثة متغيرات مستقلة وهي Y_{t-1} $X_t,$ $X_{t-1},$ والميل الحدي للمتغير Y_{t-1} يعطي تقدير لمعامل الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى وهو $(\hat{\rho})$. أما المرحلة الثانية تتضمن تقدير معالم النموذج التالي:

$$(Y_t - \hat{\rho}\, Y_{t-1}) = \beta_0^* + \beta_1 (X_t - \hat{\rho}\, X_{t-1}) + U_t$$

حيث ان

$$\beta_o^* = \beta_0 (1 - \hat{\rho})$$

ويمكن تعميم طريقة ديربن إلى (k) من المتغيرات المستقلة وكالاتي

$$(Y_t - \rho\, Y_{t-1}) = \beta_0^* - \beta_1 (X_{1t} - \rho\, X_{1t-1}) + \beta_2 (X_{2t} - \rho\, X_{2t-1}) + \ldots + \beta_k (X_k - \rho\, X_{kt-1}) + U_t$$

4.6 اختبار وجود الارتباط الذاتي

لاختبار الفرضية التي تنص على عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء العشوائية للسلسلة الزمنية المدروسة ، توضع فرضية العدم التالية:

$$H_0 : \rho = 0$$

مقابل الفرضية البديلة

$$H_1 : \rho \neq 0$$

ويستخدم اختبار ديربن واتسن (D.W) ، الذي بدوره يعتمد على الاخطاء العشوائية الناتجة في النموذج الخطي العام التالي:

$$Y = X\beta + U$$

حيث يفترض ان الفروق للاخطاء العشوائية تأخذ الصيغة التالية:

$$U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t$$

وفي الواقع التطبيقي ، يتم احتساب الاخطاء العشوائية للنموذج أعلاه كالاتي:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

وبالتالي تقدر قيمة معامل ديربن واتسن ، بموجب الصيغة التالية:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \quad \text{.........} (16)$$

$$\therefore D.W. = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

وعندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية ، أي ان $(n \to \infty)$ يمكن القول :

$$\sum_{t=2}^{n} e_t^2 \approx \sum_{t=1}^{n} e_t^2 \approx \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2$$

وكذلك

$$\sum_{t=2}^{n} e_t\, e_{t-1} \approx \sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1}$$

وعليه يمكن تعديل صيغة ديربن واتسن أعلاه كما يلي:

$$D.W. = 1 - \frac{2\,\hat{Cov}(e_t\, e_{t-1})}{\hat{Var}(e_t)} + 1$$

$$\therefore D.W. = 2 - 2\hat{\rho} = 2(1 - \hat{\rho})$$

وبما إن ($-1 \le \hat{\rho} \le 1$) ، لذا فإن قيمة (D.W.) تنحصر بين الصفر والأربعة ، فعلى سبيل المثال عندما تكون

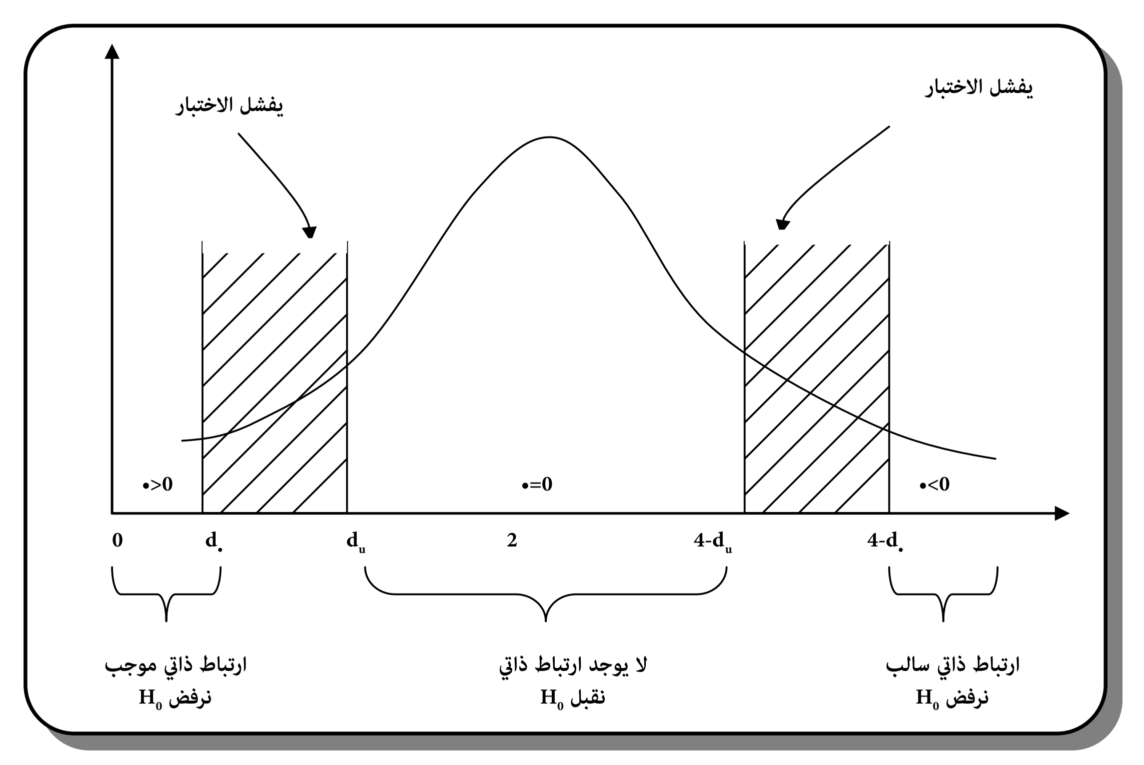
$$\hat{\rho} = 1 \quad \rightarrow \quad D.W. = 0$$
$$\hat{\rho} = 0 \quad \rightarrow \quad D.W. = 2$$
$$\hat{\rho} = -1 \quad \rightarrow \quad D.W. = 4$$

يتضح من أعلاه ، أنه كلما كانت قيمة (D.W.) قريبة من الصفر دل ذلك على وجود ارتباط ذاتي موجب ، في حين كلما اقتربت هذه القيمة من الأربعة ، دل ذلك على وجود ارتباط ذاتي سالب ، والقيمة الوسطي لمعامل (D.W.) تعني انعدام الارتباط الذاتي كليا.

ولغرض إجراء الاختبار ، يستوجب ايجاد القيمة العليا (d_u) والقيمة الدنيا ($d_.$) لمعامل (D.W.) ، الموجودة في جداول خاصة محسوبة على اساس درجات الحرية (n) وعدد المتغيرات المستقلة تحت البحث . (k) ولمستوى دلالة معين ، عليه فان قبول فرضية العدم أو رفضها يتم على اساس التوزيع التالي:-

ت	الحالة	الاستنتاج
.1	$4\text{-}d_. < D.W. < 4$	ترفض (H_0) ، يوجد ارتباط ذاتي سالب.
.2	$4\text{-}d_u < D.W. < 4\text{-}d_.$	لا يمكن الجزم بشئ (الاختبار فاشل)
.3	$d_u < D.W. < 4\text{-}d_u$	تقبل (H_0) ، انعدام وجود الارتباط الذاتي.
.4	$d_. < D.W. < d_u$	لا يمكن الجزم بشئ (الاختبار فاشل)
.5	$0.0 < D.W. < d_.$	ترفض (H_0) ، يوجد ارتباط ذاتي موجب.

والشكل البياني رقم (5) يبين التوزيع الاحتمالي لاحصاءة (D.W.).



شكل رقم (5)

وتجدر الاشارة هنا إلى ان قيمة الارتباط الذاتي يمكن حسابه بشكل تقريبي من احصاءة (D.W) الانفة الذكر مباشرة وكالاتي:

$$\mathbf{D.W.} = 2(1-\hat{\rho})$$

$$\therefore \frac{\mathbf{D.W.}}{2} = 1-\hat{\rho}$$

$$\therefore \hat{\rho} = 1-\frac{\mathbf{D.W.}}{2} \quad \text{.....(17)}$$

مثال تطبيقي (3)

للبيانات الخاصة بدالة الاستهلاك والواردة في الفصل الثاني من هذا الكتاب . اختبر فيما اذا كانت الصيغة المقدرة تعاني مـن وجود الارتباط الذاتي أم لا.

الحل:

سبق وان قدرت معالم دالة الاستهلاك ، وكانت الصيغة التقديرية لها كالاتي:

$$\hat{Y}_t = -9.532 + 0.617X_{1t} + 0.348X_{2t}$$

وباستخدامها تم احتساب القيم التقديرية لمتوسط انفاق الفرد ، وبالتالي الانحرافات الناتجة من الفرق بين القيم المشاهدة والقيم التقديرية للمتغير المعتمد ، وكما في الجدول التالي:

$\hat{Y}_t$	e_t	e_{t-1}	e_t-e_{t-1}
74.7908	0.5092	-	-
80.4702	4.5298	0.5092	4.0206
85.6968	2.2732	4.5298	-2.2566
86.2984	-4.2984	2.2732	-6.5717
85.32698	0.6302	-4.2984	4.9287
83.1718	-1.7718	0.6302	-2.4020
78.8293	2.6707	-1.7718	4.4425
77.5684	7.3316	2.6707	4.6609
81.1579	-5.2579	7.3316	-12.5895
75.0026	-17.5026	-5.2579	-12.2447
85.6286	-15.6286	-17.5026	1.8740
108.4269	19.0731	-15.6286	34.7017
134.0516	5.3484	19.0731	-13.7247
139.3651	8.6349	5.3484	3.2865
160.2509	13.3491	8.6349	4.7142
197.6960	-23.0959	13.3491	-36.4451
182.2796	3.5204	-23.0959	26.6164

من الجدول أعلاه يمكن الحصول على العمليات الحسابية التالية:

$$\sum_{t=2}^{n}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2 = 3910.07723$$

$$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = 1878.048268$$

$$\therefore D.W. = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{3910.07723}{1878.048268} = 2.081989743$$

ومن جداول (D.W.) لمستوى دلالة (5%) ودرجة حرية (n, k) والمساوية إلى (17 , 2) نجد أن:

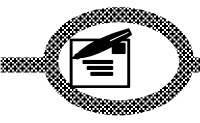
$d_u=1.54,\ d_{.}=1.02$

أي ان

$d_u < D.W < 4-d_u$

أو $1.54 < 2.082 < 2.46$

ومنه يستنتج عدم وجود ارتباط ذاتي ،أي نقبل فرضية العدم (H_0) .



مثال تطبيقي (4)

عينة عشوائية حجم n=15 ، فيها المتغير Y_t يرتبط خطيا بالمتغير المستقل X_t . يطلب اختبار لوجود مشكلة الارتباط الـذاتي ، فإن وجد قدر قيمة واستبعد اثره مستخدما:

a. طريقة التكرار

b. طريقة ديربن

Y_t	33, 34, 38, 43, 46, 46, 45, 37, 40, 38, 40, 43, 44, 54, 55.
X_t	10, 10, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 16.

الحل:

لاختار وجود الارتباط الذاتي ـ نستخدم اختبار ديربن – واتسن وهذا يتطلب تقدير معالم خط الانحدار (Y_t) على (X_t) ، ثم ايجاد القيم التقديرية وذلك بتطبيق طريقة (OLS) مباشرة على بيانات المتغيرين المعطاة في الجدول أعلاه.

$$\mathbf{b}_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{LS} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} n & \sum X_t \\ \sum X_t & \sum X_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_t Y_t \end{bmatrix}$$

وفي أدناه العمليات الحسابية اللازمة لذلك

$$n=15, \sum X_t = 195 \ , \ \sum X_t^2 = 2583 \ , \ \sum Y_t = 636 \ , \ \sum X_t Y_t = 8400$$

$$\mathbf{b}_{LS} = \begin{bmatrix} 15 & 195 \\ 195 & 2583 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 636 \\ 8400 \end{bmatrix} = \frac{1}{720} \begin{bmatrix} 2586 & -195 \\ -195 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 636 \\ 8400 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{b}_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.65 \\ 2.75 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_t = 6.65 + 2.75 X_t$$

وباستخدام الصيغة التقديرية أعلاه ، تم الحصول على القيم التقديريـة للمتغـير المعتمـد ، وبالتـالي اجـراء كافـة العمليـات الحسابية اللازمة لاحتساب اختبار ديربن واتسن وكالاتي:-

Y_t	$\hat{Y}_t$	e_t	e_{t-1}	e_t-e_{t-1}
33	34.15	-1.15	-	-
34	34.15	-0.15	-1.15	1.00
38	36.90	1.10	-0.15	1.25
43	39.65	3.35	1.10	2.25
46	39.65	6.35	3.35	3.00
46	42.40	3.60	6.35	2.75
45	42.40	2.60	3.60	-1.00
37	42.40	-5.40	2.60	-8.00
40	42.40	-2.40	-5.40	3.00
38	42.40	-4.40	-2.40	-2.00
40	45.15	-5.15	-4.40	-0.75
43	45.15	-2.15	-5.15	3.00
44	47.90	-3.90	-2.15	-1.75
54	50.65	3.35	-3.90	7.25
55	50.65	4.35	3.35	1.00

من الجدول أعلاه ، يمكن الحصول على العمليات الحسابية التالية:

$$\sum_{t=1}^{15} e_t^2 = 204.6\ ,\ \sum_{t=2}^{15}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2 = 168.375$$

$$\therefore D.W. = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{168.375}{204.6} = 0.8229$$

ومن جداول (D.W) لمستوى دلالة (5%) ودرجة حرية (1, 15) نجد بأن d_L=1.08 ، d_u=1.36

أي أن

$$0.0 < 0.8229 < 1.08$$

اذن نرفض فرضية العدم (H_0: •=0) ، أي ان هناك ارتباط ذاتي موجب ، وبالتالي يستوجب تقديره بموجب الصيغة السابقة الذكر والمعاد كتابتها في أدناه:-

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}$$

علما بأن

$$\sum_{t=2}^{15} e_t \, e_{t-1} = 110.29 \; , \quad \sum_{t=2}^{15} e_{t-1}^2 = 185.6775$$

$$\therefore \hat{\rho} = \frac{110.29}{185.6775} = 0.59$$

طريقة التكرار:

بعد ثبوت وجود الارتباط الذاتي ، وتقدير قيمتـه $\hat{\rho} = 0.59$ ، يمكـن اسـتخدام طريقـة التكـرار لتنقيـة بيانـات العينة من أثر وجوده ، حيث يتطلب ذلك العمليات الحسابية التالية:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} \; , \quad X_t^* = X_t - \hat{\rho} \, X_{t-1}$$

Y_t	Y_{t-1}	Y^*_t	X_t	X_{t-1}	X^*_t
33	-	-	10	-	-
34	33	14.53	10	10	4.1
38	34	17.94	11	10	5.1
43	38	20.58	12	11	5.51
46	43	20.63	12	12	4.92
46	46	18.86	13	12	5.92
45	46	17.86	13	13	5.33
37	45	10.45	13	13	5.33
40	37	18.17	13	13	5.33
38	40	14.4	13	13	5.33
40	38	17.58	14	13	6.33
43	40	19.4	14	14	5.74
44	43	18.63	15	14	6.74
54	44	28.04	16	15	7.15
55	54	23.14	16	16	6.56

من بيانات الجدول أعلاه يمكن الحصول على العمليات الحسابية التالية:

$$n = 14 \; , \; \sum X_t^* = 79.39 \; , \quad \sum Y_t^* = 260.21$$

$$\sum X_t^{*2} = 458.6687 \; , \; \sum X_t^* \; Y_t^* = 1502.592$$

بتطبيق أسلوب (OLS) على بيانات العينة المنقاة ، يمكن تقدير معالم العلاقة الخطية بالشكل الاتي:

$$\mathbf{b}^*_{LS} = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1^* \end{bmatrix}_{LS} = \left(X^{*\prime} X^*\right)^{-1} X^{*\prime} Y^* = \begin{bmatrix} n & \sum X_t^* \\ \sum X_t^* & \sum X_t^{*2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t^* \\ \sum Y_t^* X_t^* \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \hat{b}_0^* \\ \hat{b}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 79.39 \\ 79.39 & 458.6687 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 260.21 \\ 1508.592 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5009 \\ 3.18928 \end{bmatrix}$$

حيث ان الحد الثابت في الصيغة التقديرية$\left(\hat{Y}_t^* = \hat{b}_0 + \hat{b}_1^* X_t^*\right)$ يجب تعديله بالشكل التالي:

$$\hat{b}_0 = \frac{\hat{b}_0^*}{(1-\hat{\rho})} = \frac{0.50}{0.41} = 1.22$$

عليه فإن الصيغة التقديرية بعد التكرار الاول تكتب

$$\hat{Y}_t^* = 1.22 + 3.19\, X_t^*$$

ونستمر في عملية التكرار هذه ، مستخدمين معالم العلاقة الجديدة أعلاه في ايجاد الانحرافات وبالتالي الاختبار لوجود الارتباط الذاتي ، فإذا كانت نتيجة الاختبار تؤكد وجود الارتباط الذاتي، استوجب استبعاد أثره مرة ثانية من بيانات العينة ، أما إذا أظهرت نتيجة الاختبار بعدم وجوده عندئذ تعتمد معالم العلاقة المقدرة الاخيرة.

والجدول التالي يوضح العمليات الحسابية اللازمة لعملية التكرار الثانية.

Y^*_t	Y^*_t	e^*_t	e^*_{t-1}	$e^*_t - e^*_{t-1}$
14.53	14.299	0.231	-	-
17.94	17.489	0.451	0.231	0.22
20.58	18.7969	1.7831	0.451	1.3321
20.63	16.9148	3.7152	1.7851	1.9321
18.86	20.1048	-1.2448	3.7152	-4.96
17.86	18.2227	-0.3627	-1.2448	0.8821
10.45	18.2227	-7.7727	-0.3627	-7.41
18.17	18.2227	-0.0527	-7.7727	7.72
14.40	18.2227	-3.8227	-0.0527	-3.77
17.58	21.4127	-3.8327	-3.08227	-0.01
19.40	19.5306	-0.1306	-3.8327	3.7021
18.63	22.7206	-4.0906	-0.1306	-3.96
28.04	24.0285	4.0115	-4.0906	8.021
23.14	22.1464	0.9936	4.0115	-3.0179

ومن الجدول أعلاه يمكن الحصول على العمليات الحسابية التالية:

$$\sum\left(e_t^* - e_{t-1}^*\right)^2 = 263.79398$$

$$\sum e_t^{*2} = 142.4697$$

$$\therefore D.W. = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(e_t^* - e_{t-1}^*\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^{*2}} = \frac{263.79398}{142.4697} = 1.852$$

وبأستخدام حجم عينة n=14 وعدد متغيرات مستقلة k=1 ومستوى دلالة 5% ، نجد ان:

$d_L=1.045$, $d_u=1.350$

أي ان

$d_u < 1.852 < 4-d_u$

أو

$1.350 < 1.852 < 2.650$

وهذا يعني عدم وجود ارتباط ذاتي في بيانات العينة تحت البحث ، وبذلك يجب ان نتوقف عند هذا الحد ، ونعتمد الصيغة التقديرية أعلاه.

<u>طريقة ديربن:-</u>

في الواقع هذه الطريقة تبتدأ بنفس الاسلوب ، طريقة التكرار ، أي تطبيق طريقة (OLS) مباشرة ، ثم تقدير قيمة الانحرافات الاولية ومنها يمكن احتساب (D.W.) وبالتالي الاختبار لوجود الارتباط الذاتي ، فأن ثبت وجوده نعتمد الطريقة التالية لتقديره.

$$Y_t = \beta_0\left(1-\rho\right) + \rho\, Y_{t-1} + \beta_1 X_t - \beta_1 \rho X_{t-1} + U_t$$

$$Y_t = \beta_0^* + \rho\, Y_{t-1} + \beta_1\, X_t - \gamma\, X_{t-1} + U_t$$

حيث

$$\beta_0^* = \beta_0\left(1-\rho\right), \gamma = \beta_1 \rho$$

وباستخدام طريقة (OLS) لتقدير معالم العلاقة أعلاه ، يستوجب إجراء العمليات الحسابية التالية:

$n = 15$, $\sum Y_{t-1} = 581$, $\sum X_t = 195$, $\sum X_{t-1} = 179$,
$\sum Y_{t-1}^2 = 24509$, $\sum X_t Y_{t-1} = 7763$, $\sum Y_{t-1} X_{t-1} = 7520$, $\sum X_t^2 = 2583$,
$\sum X_{t-1} X_t = 2402$, $\sum X_{t-1}^2 = 2327$, $\sum Y_t = 636$, $\sum Y_t Y_{t-1} = 25355$,
$\sum Y_t\, X_t = 8400$ $\sum Y_t X_{t-1} = 7805$

$$\therefore \mathbf{b}_{LS} = \begin{bmatrix} b_0^* \\ \hat{\rho} \\ b_1 \\ \hat{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum Y_{t-1} & \sum X_t & \sum X_{t-1} \\ \sum Y_{t-1} & \sum Y_{t-1}^2 & \sum X_t Y_{t-1} & \sum Y_{t-1} X_{t-1} \\ \sum X_t & \sum X_t Y_{t-1} & \sum X_t^2 & \sum X_{t-1} X_t \\ \sum X_{t-1} & \sum Y_{t-1} X_{t-1} & \sum X_t X_{t-1} & \sum X_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum Y_t Y_{t-1} \\ \sum Y_t X_t \\ \sum Y_t X_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{LS} = \begin{bmatrix} 15 & 581 & 195 & 179 \\ 581 & 24509 & 7763 & 7520 \\ 195 & 7763 & 2583 & 2402 \\ 179 & 7520 & 2402 & 2327 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 636 \\ 25355 \\ 8400 \\ 7805 \end{bmatrix}$$

$$|(XX)| = 9520722$$

$$\therefore \mathbf{b}_{LS} = \begin{bmatrix} 5.24439 & -0.06269 & -0.51760 & 0.33348 \\ -0.06269 & 0.00557 & 0.00615 & -0.01955 \\ -0.51760 & 0.00615 & 0.06074 & -0.04278 \\ 0.33348 & -0.01955 & -0.04278 & 0.08214 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 636 \\ 25355 \\ 8400 \\ 7805 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} b_0^* \\ \hat{\rho} \\ b_1 \\ \hat{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72947 \\ 0.61911 \\ 3.23981 \\ -2.04701 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{\rho} = 0.62$$

التقدير الاولي لمعامل الارتباط الذاتي أعلاه ، يمكن أن نختبر مدى معنويته باستخدام اختبار (t)، حيث ان

$$t_{0(n-k-1)} = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{Var(\hat{\rho})}}$$

وفي حالة ثبوت معنوية تجري عملية تنقية كل من المتغير المعتمد والمتغير المستقل من اثر وجود الارتباط الذاتي وفق الاسلوب الاتي:-

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho}\, Y_{t-1} \;,\; X_t^* = X_t - \hat{\rho}\, X_{t-1}$$

Y_t^*	13.54, 16.92, 19.44, 19.34, 17.48, 16.48, 9.1, 17.06, 13.2, 16.44, 18.2, 17.34, 26.72, 21.52
X_t^*	3.8, 4.8, 5.18, 4.56, 5.56, 4.94, 4.94, 4.94, 4.94, 5.94, 5.32, 6.32, 6.7, 6.08

من البيانات أعلاه والتي استبعد منها أثر وجود الارتباط الذاتي يمكن الحصول على العمليات الحسابية التالية:

$$n = 14, \sum X_t^* = 74.02\ , \quad \sum X_t^{*2} = 399.0188$$
$$\sum Y_t^* = 242.78\ , \quad \sum X_t^* Y_t^* = 1308.528$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1 \end{bmatrix} = \left(X^{*\prime} X^* \right)^{-1} X^{*\prime} Y^*$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum X_t^* \\ \sum X_t^* & \sum X_t^{*2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t^* \\ \sum Y_t^* X_t^* \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} 14 & 74.02 \\ 74.02 & 399.0188 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 242.78 \\ 1308.528 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 3.25 \end{bmatrix}$$

عليه فـإن الصـيغة التقديريـة $\left(\hat{Y}_t^* = b_0^* + b_1 X_t^*\right)$ تكتـب كالتـالي $\hat{Y}_t = 0.15 + 3.25 X_t^*$ حيـث يـتم تعديل الحد الثابت بالشكل التالي:

$$b_0^{**} = \frac{b_0^*}{1 - \hat{\rho}} = \frac{0.15}{0.38} = 0.39$$

والصيغة التقديرية بعد التنقية الاولى سوف تكون كالتالي

$$\hat{Y}_t^* = 0.39 + 3.25 X_t^*$$

حيث تستخدم معالم هذه الصيغة لتقدير القيم التقديرية للمتغير المعتمد ، ومنها تحتسب الانحرافات وبالتالي تقدير قيمة (D.W) مرة اخرى ، وعندها يتخذ القرار فيما اذا تجرى عملية التنقية للمرة الثانية أو اعتماد الصيغة المقدرة أعلاه ، أي أن:

Y_t^2	$\hat{Y}_t^*$	e_t^*	e_{t-1}^*	$e_t^* - e_{t-1}^*$
13.54	12.74	0.80	-	-
16.92	15.99	0.93	0.80	0.13
19.44	17.25	2.19	0.93	1.16
19.34	15.21	4.13	2.19	1.94
17.48	18.46	-0.98	4.13	-5.111
16.48	16.445	0.035	-0.98	1.015
9.1	16.445	-7.345	0.035	-7.38
17.06	16.445	0.615	-7.345	7.96
13.2	16.445	-3.245	0.615	3.86
16.44	19.695	-3.255	-3.245	-0.01
18.2	17.68	0.52	-3.255	3.775
17.34	20.93	-3.59	0.52	-4.11
26.72	22.165	4.555	-3.59	8.145
21.52	20.15	1.37	4.555	-3.185

وبالتالي اجراء العمليات الحسابية التالية لتطبيق اختبار (.D.W)

$$\sum \left(e_t^* - e_{t-1}^*\right)^2 = 272.82085$$

$$\sum e_t^{*2} = 135.7478$$

$$\therefore D.W. = \frac{272.82085}{135.7478} \approx 2.0$$

وباستخدام حجم عينة n=15 و k=1 وبمستوى دلالة 5% ، نجد من جدول (D.W) القيم الحرجة العليا والدنيا كآلاتي:

$d_L=1.045$, $d_u=1.350$

أي أن

$d_u < D.W < 4\text{-}d_u$

$1.36 < 2.0 < 2.64$

اذن نقبل (H_0) ، أي لا يوجد ارتباط ذاتي ، وبذك نتوقف عند هذا الحد ونعتمد الصيغة التقديرية أعلاه.

4.7 جدول تحليل التباين (ANOVA)

في الفصل الثالث من هذا الكتاب ، تم تحليل انحرافات المتغير المعتمد في ظل فرضية عدم تجانس تباين الخطأ ، حيث جزء مجموع مربعات الانحرافات الكلية إلى جزئين، الأول يمثل مجموع مربعات الانحرافات الموضحة ، والثاني يمثل مجموع مربعات الانحرافات غير الموضحة ، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

نفس اسلوب التحليل أعلاه ، يمكن تطبيقه في حالة فرضية وجود الارتباط الذاتي بين مشاهدات العينة المدروسة ، أي أن

$$T'T = \left(1 - \rho^2\right)\Omega^{-1}$$

باستخدام المصفوفات والموجهات للتعبير عن كافة مصادر الانحرافات ، نحصل على:

$$e'\Omega^{-1}e = \left(Y - Xb_{GLS}\right)'\,\Omega^{-1}\left(Y - Xb_{GLS}\right)$$
$$= Y'\Omega^{-1}Y - 2b'_{GLS}\,X'\Omega^{-1}\,Y + b'_{GLS}\,X'\Omega^{-1}\,Xb_{GLS}$$

بالتعويض عن قيمة (b_{GLS}) نحصل على

$$e'\Omega^{-1}e = Y'\Omega^{-1}Y - b'_{GLS}\,X'\Omega^{-1}Y$$

$$\therefore Y'\Omega^{-1}Y = b'_{GLS}\,X'\Omega^{-1}Y + e'\Omega^{-1}e \quad \text{.......} (18)$$

الصيغة رقم (18) أعلاه ، توضح المصادر الاساسية لانحرافات مشاهدات موجه المتغير المعتمد (Y) في ظل فرضية وجود الارتباط الذاتي ، حيث ان:

$\mathbf{Y'\Omega^{-1}Y}$ تمثل الانحرافات الكلية (TSS)

$\mathbf{b'_{GLS}\ X'\Omega^{-1}Y}$ تمثل الانحرافات الموضحة (ESS)

$\mathbf{e'\Omega^{-1}e}$ تمثل الانحرافات غير الموضحة (المتبقي) (RSS)

علما بأن صيغة معامل التحديد في ظل وجود الارتباط الذاتي تعطى كالاتي:

$$\mathbf{R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{b'_{GLS}X'\Omega^{-1}Y}{Y'\Omega^{-1}Y}}$$

مصادر الانحرفات الثلاثة أعلاه ، يمكن إعادة صياغتها بدلالة معامل التحديد وكالاتي:

$$\mathbf{Y'\Omega^{-1}Y\,R^2 = b'_{GLS}X'\Omega^{-1}Y} \quad \text{.......... (19)}$$

بالتعويض في الصيغة رقم (18) ، وإعادة الترتيب نحصل على

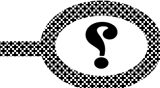
$$\mathbf{e'\Omega^{-1}e = Y'\Omega^{-1}Y - Y'\Omega^{-1}Y\,R^2}$$

$$\mathbf{= Y'\Omega^{-1}Y\left(1-R^2\right)} \quad \text{.......... (20)}$$

الانحرافات الكلية والانحرافات الموضحة والغير موضحة والمعطاة بموجب الصيغ المرقمة (18) ، (19) ، (20) ، تكون حجر الأساس في بناء جدول تحليل التباين (ANOVA) في ظل وجود مشكلة الارتباط الذاتي وكما في الجدول التالي:

S of V	S	d.f	MSS	F-test
الانحرافات الموضحة due to $X_1, X_2, \ldots, X_k$	$\mathbf{b'_{GLS}X'\Omega^{-1}Y = Y'\Omega^{-1}Y\,R^2}$	k	$\mathbf{\frac{Y\Omega^{-1}Y\,R^2}{k}}$	$\mathbf{F_0 = \frac{\frac{Y'\Omega^{-1}YR^2}{k}}{\frac{Y'\Omega^{-1}Y(1-R^2)}{n-k-1}}}$
الانحرافات غير الموضحة (Residual)	$\mathbf{e'\Omega^{-1}e = Y'\Omega^{-1}Y\left(1-R^2\right)}$	n-k-1	$\mathbf{\frac{Y'\Omega^{-1}Y\left(1-R^2\right)}{n-k-1}}$	$\mathbf{\therefore F_0 = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}}$
الانحرافات الكلية (Total variation)	$\mathbf{Y'\Omega^{-1}Y}$	n-1		

وبمقارنة قيمة (F_0) العملية مع القيمة النظرية (الجدولية) المقابلة لها بدرجة حرية (k) و(n-k-1) ولمستوى دلالة معين ، فإذا كانت ($F_0 < F_t$) ، دل ذلك على عدم معنوية العلاقة الخطية المفترضة بين المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة، وبعكسه يكون هناك تأثير وعلاقة وثيقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير المعتمد.



التماريـــــن

1 للنموذج الخطي العام التالي

$$Y = X\beta + U$$
$$U \sim N(0\,, \sigma_u^2\,\Omega)$$

وان

$$U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N\left(0\,,\,\sigma_\varepsilon^2\right),\; E\left(\varepsilon_t\,,\,\varepsilon_s\right) = 0 \;\;\forall\; t \neq S$$

في ظل الفروض أعلاه ، اشتق عناصر المصفوفة (Ω).

2 البيانات التالية تمثل الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد (Y_t)، في عينة عشوائية ذات حجم (15) مشاهدة.

التسلسل	$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$	التسلسل	$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$
1	-0.15	9	-2.40
2	-0.15	10	-4.40
3	1.10	11	-5.15
4	3.53	12	-3.90
5	6.35	13	3.35
6	3.60	14	4.35
7	2.60	15	-2.15
8	-5.40		

احسب معامل ديربن واتسن (D.W.) ثم اختبر لوجود الارتباط الذاتي (ρ) مستخدما مستوى دلالة (5%) فإن وجد قدر قيمة وبين نوعيته ، علما بان هناك متغير مستقل واحد في النموذج المدروس ، أي ان **k=1**.

3 اذا كان (U_t) في النموذج التالي:

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_t + U_t$$

$$U_t \sim N(0 , \sigma_u^2 \Omega)$$

يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى (First - Order Autorgressive) بمقدار $(\hat{\rho} = -0.9)$، بين مشاهدات السلسلة الزمنية التالية :

$$Y_t = 1, 2, 0, 1$$

$$X_t = 2, 3, 1, 2$$

قدر معالم هذا النموذج مستخدما

1. 2SP
2. GLS

ثم بين كفاءة التقدير باستخدام (GLS) نسبة إلى (OLS).

4 اذا كان (U_t) في النموذج التالي

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t$$

$$t = 1, 2, ..., n.$$

$$E(U_t) = 0 , E(U_t^2) = \sigma_u^2 \Omega$$

يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى ، أي أن:

$$U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث ان

$$\varepsilon_t \sim N(0 , \sigma_\varepsilon^2), \; E(\varepsilon_t , \varepsilon_s) = 0 \quad \forall \; t \neq S$$

a. اثبت في ظل الفروض أعلاه بأن

$$Cov(U_t U_{t-1}) = \rho \sigma_u^2$$

b. فرضا (X_t) في النموذج أعلاه اخذ المشاهدات التالية:

$X_1=1$ ، $X_2=0$ ، $X_3=2$ مع $\hat{\rho} = -0.5$ أوجد كفاءة تقديرالميل الحدي والحد الثابت لهذا النموذج.

5 للنموذج الخطي التالي

$$\mathbf{Y = X\beta + U}$$

$$\mathbf{U \sim N\left(0\ ,\ \sigma_u^2\ \Omega\right)}$$

وان

$$\mathbf{U_i = \rho\, U_{i-1} + \varepsilon_i}$$

i=1, 2, .., n

$$\mathbf{\varepsilon_i \sim N\left(0\ ,\ \sigma_\varepsilon^2\right)}$$

$$\mathbf{E\left(\varepsilon_i\ ,\ \varepsilon_j\right) = 0 \quad \forall\ i \neq j}$$

1. في ظل الفروض أعلاه ، اشتق صيغة لتقدير موجه (β).
2. اثبت بأن دالة الامكان الاعظم (MLE) تعطي تقدير غير متحيز لموجه (β).

7 في ظل افتراض وجود الارتباط الذاتي بين مشاهدات العينة ، اثبت ولاي حجم عينة مختارة:



1. $b_{2SP}=b_{GLS}$
2. $Var\text{-}Cov(b)_{2SP}=Var\text{-}Cov(b)_{GLS}$.

8 لدراسة العلاقة الخطية بين المتغير المعتمد (Y_t) والمتغير المستقل (X_t) ، اخذت عينة عشوائية ذات حجم n=4 .

فإذا كان U_t في النموذج التالي والمقاس بالانحرافات :

$$\mathbf{y_t = \beta_1 x_t + U_t}$$

يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى ، أي أن:

$$\mathbf{U_t = \rho\, U_{t-1} + \varepsilon_t}$$

$$\mathbf{\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right),\ E\left(\varepsilon_t\ \varepsilon_{t'}\right) = 0 \quad \forall\, t \neq t'}$$

في ظل الفروض أعلاه ، أثبت بأن كفاءة تقدير الميل الحدي (β_1) بأستخدام (GLS) نسبة إلى (OLS) مساوية إلى :

$$\text{eff}(b_1) = \frac{1}{(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4 + 2\rho^6)}$$





مشكلـــة التعـــدد الخطـــي

The Problem of Maulticollinearity

5.1 المقدمة

تحصل مشكلة التعدد الخطي عندما يرتبط اثنان أو أكثر من المتغيرات المستقلة بعلاقة خطية قوية جدا ، بحيث يصبح من الصعب فصل أثر كل متغير على المتغير المعتمد. في الواقع التطبيقي ، وخاصة فيما يتعلق بالدوال السلوكية.حيث أنه غالبا ما تكون هنالك علاقة ما بين المتغيرات المستقلة وذلك نتيجة لتأثير المتغيرات الاقتصادية ببعضها البعض، حيث أنه إذا ما انعدمت العلاقة ما بين المتغيرات المستقلة، تنتفي الحاجة إلى استخدام نموذج خطي متعدد ، اذ يمكن عندها الاستعاضة عن النموذج الخطي العام بـ **(k-1)** من النماذج الخطية البسيطة **(SLM)** والتي تتمثل بعلاقة متغير معتمد مع متغير مستقل فقط.

تواجه مشكلة التعدد الخطي أو الازدواج الخطي حينما تكون قيمة أحد المتغيرات المستقلة متساوية لكافة المشاهدات ، أو عندما تعتمد قيمة أحد المتغيرات المستقلة على قيمة واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة في النموذج المدروس ، علما بأن مثل هذه المشكلة تواجه الباحث سواء في ظل فرضية التجانس أو عدم التجانس وسواء أخذت البيانات شكل السلاسل الزمنية أو المقطعية . عليه يمكن تلخيص الفرض الخاص بالتعدد الخطي بما يلي:

"ان لا توجد علاقة خطية تامة أو شبه تامة بين أي من المتغيرات المستقلة" ، إضافة إلى ذلك يجب ان يكون عدد المعالم المطلوب تقديرها أقل من حجم العينة تحت البحث ، أي أن:

$$\mathbf{rank}(\mathbf{X}) = \mathbf{k} + \mathbf{1} < \mathbf{n} \qquad (1)$$

5.2 آثار مشكلة التعدد الخطي

يتعذر تقدير معالم النموذج عندما تكون هنالك علاقة خطية تامة ما بين اثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة ويرجع السبب في ذلك إلى استحالة ايجاد معكوس مصفوفة المعلومات $(X'X)$، وذلك لكون محدد هذه المصفوفة سوف يكون مساويا إلى الصفر ، ويمكن اثبات ذلك في حالة النموذج الخطي المتضمن متغيرين مستقلين التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + U_i \quad \text{......(2)}$$

ولنفرض بأن هنالك علاقة خطية تامة بين المتغيرين المستقلين (X_1) و (X_2) وكالاتي:

$$X_2 = g X_1$$

حيث ان (g) تمثل مقدار ثابت.

وبما ان تقدير معالم هذا النموذج يتم بموجب الصيغة العامة التالية:

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{LS} = (X'X)^{-1} X' Y$$

أي ان مصفوفة $(X'X)$ سوف تأخذ الشكل التالي:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_2 X_1 & \sum X_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |X' X| = n \sum X_1^2 \sum X_2^2 + 2 \sum X_1 \sum X_2 \sum X_1 X_2 - \left(\sum X_2\right)^2 \sum X_1^2$$
$$- n \left(\sum X_1 X_2\right)^2 - \left(\sum X_1\right)^2 \sum X_2^2$$

بالتعويض في قيد العلاقة الخطية التامة نحصل على:

$$\therefore |X'X| = n g^2 \left(\sum X_1^2\right)^2 + 2 g^2 \left(\sum X_1\right)^2 \sum X_1^2 - g^2 \left(\sum X_1\right)^2 \sum X_1^2 - n g^2 \left(\sum X_1^2\right)^2$$
$$- g^2 \left(\sum X_1\right)^2 \sum X_1^2$$

$$\therefore |X'X| = n g^2 \left(\sum X_1^2\right)^2 + 2 g^2 \left(\sum X_1\right)^2 \sum X_1^2 - 2 g^2 \left(\sum X_1\right)^2 \sum X_1^2 - n g^2 \left(\sum X_1^2\right)$$

$$= n g^2 \left(\sum X_1^2\right)^2 - n g^2 \left(\sum X_1^2\right)^2 = 0$$

النتيجة أعلاه يمكن ان تعمم لاكثر من متغيرين مستقلين ، ومنها يستنتج بأنه لا توجد أي امكانية لتقدير معالم النموذج ، ولاثبات ذلك ، دعنا ان نقدر معالم النموذج رقم (2) متبعين اسلوب الانحرافات (التقدير حول نقطة المتوسط).

$$\therefore x'x = \begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 x_1 & \sum x_2^2 \end{bmatrix}, \quad x'y = \begin{bmatrix} \sum x_1 y_i \\ \sum x_2 y_i \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{LS} = \frac{\begin{bmatrix} \sum x_2^2 & -\sum x_1 x_2 \\ -\sum x_2 x_1 & \sum x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_1 y_i \\ \sum x_2 y_i \end{bmatrix}}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2}$$

$$\therefore b_1 = \frac{\left(\sum x_1 y_i\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)\left(\sum x_2 y_i\right)}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2}$$

وكذلك

$$\therefore b_2 = \frac{\left(\sum x_2 y_i\right)\left(\sum x_1^2\right) - \left(\sum x_2 x_1\right)\left(\sum x_1 y_i\right)}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2}$$

وبالتعويض في العلاقة $x_2 = g\, x_1$

$$\therefore b_1 = \frac{g^2 \left(\sum x_1 y_i\right)\left(\sum x_1^2\right) - g^2 \left(\sum x_1 y_i\right)\left(\sum x_1^2\right)}{g^2 \left(\sum x_1^2\right)^2 - g^2 \left(\sum x_1^2\right)^2} = \frac{0.0}{0.0}$$

$$b_2 = \frac{g\left(\sum x_1 y_i\right)\left(\sum x_1^2\right) - g\left(\sum x_1 y_i\right)\left(\sum x_1^2\right)}{g^2 \left(\sum x_1^2\right)^2 - g^2 \left(\sum x_1^2\right)^2} = \frac{0.0}{0.0}$$

والنتيجة أعلاه تنعكس على تقدير الحد الثابت ، حيث تكون قيمته كمية غير محددة كذلك. إضافة إلى ذلك يمكن اثبات ان تباين كل من (b_1) و (b_2) يكون مساويا إلى ما لا نهاية في ظل وجود العلاقة الخطية التامة بين المتغيرات المستقلة ، فكما هو معلوم

$$Var \hat{=} Cov(b)_{LS} = S_e^2 \left(x'x\right)^{-1}$$

$$\therefore V\hat{a}r\left(b_1\right) = \frac{S_e^2 \sum x_2^2}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2}$$

وكذلك

$$\hat{Var}(b_2)=\frac{S_e^2\sum x_1^2}{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_2^2\right)-\left(\sum x_1 x_2\right)^2}$$

وبالتعويض في العلاقة ($x_2=g\ x_1$) نحصل على:

$$\hat{Var}(b_1)=\frac{S_e^2\sum x_1}{0.0}=\hat{Var}(b_2)=\infty$$

وينسحب هذا كذلك على التباين للحد الثابت ، فيكون تباينه مساويا إلى ما لا نهاية كذلك.

أما إذا كانت العلاقة الخطية غير تامة بين المتغيرات المستقلة، بعبارة اخرى ان كل من (X_1) و (X_2) في النموذج رقم (2) أعلاه يتأثران بعامل ثالث ، في مثل هذه الحالة يمكن تقدير معالم النموذج ولكن مثل هذا التقدير سوف يكون غير دقيق وغير ممثل لواقع المشكلة المدروسة، وذلك نتيجة لضآلة قيمة محدد مصفوفة المعلومات $(X'X)$ والتي يترتب عليه ان يكون تباين المعالم المقدرة كبير جدا وذلك لان:

$$Var \hat{=} Cov(b)_{LS}=S_e^2\ Adj(X'X)/|X'X|$$

وبالتالي قد يستنتج خطأ بأن بعض المتغيرات المستقلة غير مهمة ، إذ يظهر اختبار (t) عدم معنوية معالم تلك المتغيرات ، في حين أنها في الواقع معنوية ، ولكن بناء النموذج يعجز عن اظهار اثر كل منها بشكل منفصل ، نظرا لارتباط هذه المتغيرات ببعضها البعض.

5.3 اختبار وجود مشكلة التعدد الخطي

من أهم الاختبارات للكشف عن مشكلة الازدواج الخطي هو اختبار فراير وكلوبر (**Farrar-Glauber**) ويستند هذا الاختبار على احصاءه (χ^2) ، حيث تم اختبار الفرضية التالية:

فرضية العدم

Ho: (X_j)Orthogonal (X_j متعامدة)

مقابل الفرضية البديلة

H_1: (X_j) Not Orthogonal (X_j غير متعامدة)

أما صيغة الاختبار فتأخذ الشكل التالي:

$$\chi_0^2=-\left[n-1-\frac{1}{6}(2k+5)\right].\ln|(D)| \qquad (3)$$

حيث ان

(n) تمثل حجم العينة.

(k) تمثل عدد المتغيرات المستقلة.

$\ln(|D|)$ تمثل اللوغارتيم الطبيعي لمحدد مصفوفة معاملات الارتباط التالية:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ثم نقارن قيمة (χ_0^2) العملية مع قيمة (χ^2) النظرية (الجدولية) بدرجة حرية مساوية إلى $k(k-1)/2$ ومستوى معنوية معين . فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية ترفض فرضية العدم (H_0) وتقبل الفرضية البديلة (H_1) ، أي ان هناك مشكلة التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة ، والعكس صحيح.

وبعد ثبوت مشكلة التعدد الخطي بموجب الاختبار أعلاه ، يستوجب تحديد أي متغير من المتغيرات المستقلة مرتبط خطيا بحيث ادى إلى حدوث مشكلة التعدد الخطي ، ويتم مثل هذا التشخيص باستخدام اختبار (F) حيث تستخرج القيمة المحسوبة للاختبار المذكور أعلاه ، بعد تقدير معامل التحديد المتعدد ما بين المتغير المستقل (X_i) وبقية المتغيرات المستقلة وكالاتي:

$$R_j^2 \; 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots k \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

فعلى سبيل المثال ، معامل التحديد بين أربعة معاملات مستقلة يعطى وفق الصيغة التالية:

$$R_{1.234}^2 = 1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13.2}^2)(1 - r_{14.23}^2)$$

حيث ان $r_{13.2}$, $r_{14.23}$ تمثل معاملات الارتباط الجزئية.

والصيغة العامة للاختبار

$$F_j = \frac{R_j^2 .23 \ldots k / (k-1)}{(1 - R_j^2 .23 \ldots k) / (n-k)} \qquad \ldots\ldots (4)$$

ثم نختبر فرضية العدم التالية:

$$H_0 : R_{j.23\ldots k}^2 = 0$$

مقابل الفرضية البديلة

$$H_1 : R_{j.23\ldots k}^2 \neq 0$$

ونقارن قيمة (F_j) العملية مع القيمة المقابلة لها (الجدولية) ، بدرجة حرية مساوية إلى $(k-1)$ و $(n-k)$ ومستوى معنوية معين ، فإذا كانت القيمة العملية أكبر من القيمة النظرية ترفض فرضية العدم (H_o) ، أي أن المتغير (X_j) يرتبط خطيا مع بقية المتغيرات المستقلة ، وبعكسه ترفض الفرضية البديلة (H_1) أي أن المتغير (X_j) لا يرتبط خطيا مع بقية المتغيرات المستقلة ولا يشكل مصدرا لمشكلة التعدد الخطي. وبتطبيق هذا الاختبار بالنسبة لكل متغير مستقل ، يتم تشخيص كافة المتغيرات المستقلة التي ترتبط خطيا مع بقية المتغيرات المستقلة.

ولغرض تحديد المتغيرات المستقلة المسببة لحصول مشكلة التعدد الخطي ، يستوجب إجراء أختبار ثالث وهو أختبار (t) والذي يعتمد بدوره على قيم معاملات الارتباط الجزئية ما بين كل اثنين (زوج) من المتغيرات المستقلة ، فعلى سبيل المثال ، معامل الارتباط الجزئي بين متغيرين مستقلين بثبوت متغير مستقل ثالث ، يحسب وفق الصيغة التالية:

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - (r_{13})(r_{23})}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}}$$

حيث أن r_{23}, r_{13}, r_{12} تمثل معاملات الارتباط البسيطة.

تحسب قيمة اختبار (t_{ij}) العملية بالنسبة للمتغيرين المستقلين (X_i) و (X_j) بموجب الصيغة التالية:

$$t_{ij} = \frac{r_{ij.12.....k}\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-r_{ij.12.....k}^2}} \quad \text{.......... (5)}$$

حيث أن :

$\left(r_{ij.1\,2.....k}^2\right)$ يمثل مربع معامل الارتباط الجزئي ما بين (X_i) و (X_j) باعتبار أن بقية المتغيرات المستقلة ثابتة.

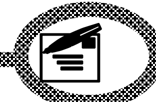
ثم نختبر فرضية العدم التالية:

$$H_o : r_{ij.1\,2......k} = 0$$

مقابل الفرضية البديلة

$$H_1 : r_{ij.12.....k} \neq 0$$

ثم نقارن قيمة (t_{ij}) العملية مع نظيرتها الجدولية لدرجة حرية $(n-k)$ ومستوى دلالة معين، فإذا كانت القيمة العملية أكبر من القيمة الجدولية نرفض (H_0) ونقبل (H_1) ، أي أن الارتباط الجزئي بين (X_i) و (X_j) معنوي. وبإجراء هذا الاختبار لكافة المتغيرات المستقلة، والتي تبين من الاختبار السابق (اختبار F_j) بأنها تشكل مصدرا لمشكلة التعدد الخطي ، وبذلك تشخص بشكل نهائي المتغيرات المستقلة التي تكون سببا في حصول مشكلة التعدد الخطي.



مثال تطبيقي

عينة عشوائية ذات حجم **n=10** ، فيها المتغير(Y_i) وعلاقته بأربعة متغيرات مستقلة ، X_4, X_3, X_2, X_1 . اختبر لوجود مشكلة التعدد الخطي ، ثم بين أي متغير مستقل يكون مصدرا لهذه المشكلة.

Y_i	X_1	X_2	X_3	X_4
6.0	40.1	5.5	108	63
6.0	40.3	4.7	94	72
6.5	47.5	5.2	108	86
7.1	49.2	6.8	100	100
7.2	52.3	7.3	99	107
7.6	58.0	8.7	99	111
8.0	61.3	10.2	101	114
9.0	62.5	14.1	97	116
9.0	64.7	17.1	93	119
9.3	66.8	21.3	102	121

<u>الحل:</u>

من البيانات أعلاه ، يمكن الحصول على العمليات الحسابية التالية:

$$\sum X_1 = 542.7, \quad \sum X_2 100.9, \quad \sum X_3 = 1001, \quad \sum X_4 = 1009$$
$$\sum X_1^2 = 30320.55, \quad \sum X_2^2 = 1303.55, \quad \sum X_3^2 = 100429, \quad \sum X_4^2 = 105573$$
$$\sum X_1X_2 = 5913.63, \quad \sum X_1X_3 = 54173.2, \quad \sum X_1X_4 = 56487.3, \quad \sum X_2X_3 = 10022.2$$
$$\sum X_2\ X_4 = 10969.5, \quad \sum X_3\ X_4 = 100617$$

ولغرض اجراء الاختبار ، يستوجب احتساب قيمة محدد مصفوفة المتغيرات المستقلة والتي عناصرها ما هي إلا عبارة عن الارتباطات البسيطة بين المتغيرات المستقلة ، علما بأن:

$$n = 10, \quad \bar{X}_1 = 54.27, \quad \bar{X}_2 = 10.09, \quad \bar{X}_3 = 100.1, \quad \bar{X}_4 = 100.9$$

$$|D| = \left| \begin{bmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & r_{x_1x_4} \\ r_{x_2x_1} & 1 & r_{x_2x_3} & r_{x_2x_4} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_2x_3} & 1 & r_{x_3x_4} \\ r_{x_1x_4} & r_{x_2x_4} & r_{x_3x_4} & 1 \end{bmatrix} \right|$$

ولغرض تسهيل العمليات الحسابية ، تم تحويل البيانات أعلاه إلى انحرافات وكالاتي:

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - n\,\overline{X}_1^2 = 868.221$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - n\,\overline{X}_2^2 = 285.469$$

$$\sum x_3^2 = \sum X_3^2 - n\,\overline{X}_3^2 = 228.9$$

$$\sum x_4^2 = \sum X_4^2 - n\,\overline{X}_4^2 = 3764.9$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - n\,\overline{X}_1\,\overline{X}_2 = 437.787$$

$$\sum x_1 x_3 = \sum X_1 X_3 - n\,\overline{X}_1\overline{X}_3 = -151.07$$

$$\sum x_1 x_4 = \sum X_1 X_4 - n\,\overline{X}_1\,\overline{X}_4 = 1728.87$$

$$\sum x_2 x_3 = \sum X_2 X_3 - n\,\overline{X}_2\,\overline{X}_3 = -77.89$$

$$\sum x_2 x_4 = \sum X_2 X_4 - n\,\overline{X}_2\overline{X}_4 = 788.69$$

$$\sum x_3 x_4 = \sum X_3 X_4 - n\,\overline{X}_3\,\overline{X}_4 = -383.9$$

ومنه تم احتساب معاملات الارتباطات البسيطة ، وذلك بموجب الصيغة التالية:

$$\therefore r_{x_i x_j} = \frac{\sum x_i x_j}{\sqrt{\sum x_i^2}\,\sqrt{\sum x_j^2}}$$

أي أن

$$r_{x_1x_2} = 0.879, \quad r_{x_1x_3} = -0.339, \quad r_{x_1x_4} = 0.956,$$
$$r_{x_2x_3} = -0.305, \quad r_{x_3x_4} = -0.414, \quad r_{x_2x_4} = 0.761,$$

وبالتالي فإن مصفوفة (D) المتماثلة والتي عناصرها تمثل معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرات المستقلة ، تكتب بالشكل التالي:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0.879 & -0.339 & 0.956 \\ 0.879 & 1 & -0.305 & 0.761 \\ -0.339 & -0.305 & 1 & -0.414 \\ 0.956 & 0.761 & -0.414 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |D| = 0.0098$$

الفرضية المطلوب اختبارها:

$H_0: X_j$	Orthogonal	المتغيرات X_j متعامدة
$H_1: X_j$	Not orthogonal	المتغيرات X_j غير متعامدة

صيغة الاختبار

$$\chi_0^2 = -\left[10 - 1 - \frac{1}{6}(8+5)\right] \ln(0.0098) = (-6.8334)(-4.6253729) = 31.606699$$

ومن جداول (χ^2) لمستوى دلالة 5% ودرجة حرية (6) ، نجد القيمة النظرية ل (χ^2) مساوية إلى (12.592)

$$\therefore 31.606699 > 12.592$$

وعليه ترفض فرضية العدم (H_0) ، وتقبل الفرضية البديلة (H_1) ، أي أن هناك مشكلة تعدد خطي بين المتغيرات المستقلة .

ولتحديد مصدر هذا التعدد الخطي يجب اجراء اختبار (F) وبموجب المراحل التالية مبتدئين بالمتغير المستقل (X_1) .

$$F_{x_1} = \frac{\left(R^2_{x_1,x_2,x_3,x_4}\right)/(k-1)}{\left(1-R^2_{x_1,x_2,x_3,x_4}\right)/(n-k)} = \frac{0.972926/2}{(1-0.972926)/7}$$

$$\therefore F_{x_1} = 125.779$$

حيث أن

$$R^2_{x_1,x_2,x_3,x_4} = 0.972926$$

والفرضية المطلوب اختبارها:

$$H_0 : R^2_{x_1,x_2,x_3,x_4} = 0$$

$$H_1 : R^2_{x_1,x_2,x_3,x_4} \neq 0$$

ومن جداول (F) الإحصائية ولمستوى دلالة 5% ودرجة حرية مساوية إلى (2, 7) نجد قيمة (F) النظرية (4.74)

$$\therefore 125.779 > 4.74$$

إذن ترفض فرضية العدم ، أي أن المتغير المستقل (X_1) يكون مصدرا لوجود مشكلة التعدد الخطي ، بعبارة اخرى المتغير (X_1) مرتبط خطيا. ثم ننتقل إلى اختبار المتغير المستقل الثاني (X_2) أي:

$$F_{x_2} = \frac{0.858/2}{(1-0.858)/7} = 21.148$$

$$\therefore 21.148 > 4.74$$

ومنه يمكن القول بأن المتغير المستقل (X_2) مرتبط خطيا ، أي أنه مصدرا لوجود مشكلة التعدد الخطي.

أما فيما يتعلق بالمتغير المستقل الثالث (X_3)

$$F_{x_3} = \frac{0.261/2}{0.739/7} = 1.236$$

$$\therefore 1.236 < 4.74$$

اذن تقبل فرضية العدم ، أي ان المتغير (X_3) غير مرتبط خطيا ، وبالتالي فأنه لا يشكل أي مصدر لمشكلة التعدد الخطي.

أما فيما يتعلق بالمتغير المستقل الرابع (X_4)

$$F_{x_3} = \frac{0.9524773/2}{(1-0.9524773)/7} = 70.148549$$

$$\therefore 70.148549 > 4.74$$

ومنه نرفض فرضية العدم ، أي أن المتغير (X_4) مرتبطا خطيا ، وبالتالي فهو مصدرا لمشكلة التعدد الخطي.

ولغرض تشخيص المتغيرات المستقلة المسببة بشكل نهائي في حصول مشكلة التعدد الخطي ، لا بد من إجراء اختبار (t) ما بين كل اثنين من المتغيرات المستقلة والتي ثبت من خلال اختبار (F) بأنها مصدر لنشوء التعدد الخطي.

5.4 مقدرات انحدار الحرف

بشكل عام مشكلة التعدد الخطي تكون على نوعين, الاول يعرف بالتعدد الخطي التام (Perfect Maulticollinearty) وكما بينا سابقاً في الجزء (5-2) في مثل هذه الحالة يكون محدد مصفوفة المعلومات او مصفوفة فيشر (Fisher Matrix) مساوياً الى الصفر بعبارة أخرى($|X'X| = 0$)، ويترتب على ذلك استحالة ايجاد مقدرات لمعالم النموذج الخطي العام، وابرز طرق المعالجة في مثل هذه الحالة هو استخدام اسلوب المركبات الرئيسية (Principle Components)، اما النوع الثاني فيسمى بالتعدد الخطي شبه التام (Semi Maulticollinearty) وفيه تكون قيمة محدد مصفوفة المعلومات صغيراً جداً وعندها تكون المعالم المقدرة ذات تباين كبير جداً ، وكما بينا سابقاً قد نستنتج خطأً بان بعض المتغيرات التوضيحية غير مهمة ومن ابرز طرق المعالجة في مثل هذه الحالة هو استخدام اسلوب انحدار الحرف (Ridge Regression) وفيما يلي تفصيل لأسلوب انحدار الحرف في عملية معالجة مشكلة التعدد الخطي ، في حين سوف نفرد المبحث (5-6) لمناقشة اسلوب المركبات الرئيسية وكالآتي:

يعتبر اسلوب انحدار الحرف (**Ridge regression**) احد بدائل طرق التقدير عنـدما يكـون هنـاك ازدواج خطـي او تعدد خطي بين المتغيرات التوضيحية للنموذج العام. ففي عام (**1970**) اقترح الباحثان (هـيرل وبنـارد) (**Hoeral – Bennard**) اسلوباً لمعالجة مثل هذه المشكلة ويتلخـص ذلك بإضافة كمية صـغيرة موجبـة الى العنـاصر القطريـة لمصـفوفة المعلومـات ($X'X$) في النموذج التالي:-

$$Y = X\beta + \mu \quad \text{...} (6)$$

حيث ان :-

Y : موجه من مرتبة (**nx1**) لمشاهدات المتغير المعتمد.

X : مصفوفة من مرتبة (**nxk**) لمشاهدات المتغيرات التوضيحية.

β : موجه من مرتبة (**kx n**) للمعالم المطلوب تقديرها.

μ : موجه من مرتبة (**nx1**) للاخطاء العشوائية بحيث ان :-

$$\mu_i \rightarrow N(0, \sigma^2 I_n)$$
$$E(\mu_i, \mu_j) \qquad \forall i \neq j$$
$$E(\mu_i, Xi) = 0$$

كما هو معلوم ، وفي حالة التعدد الخطي شبة التام ، يمكن الحصول على مقدرات أولية لمعالم النموذج الخطي العام أعلاه ، من خلال تطبيق اسلوب (**OLS**) وكالآتي :-

$$b_{LS} = (X'X)^{-1} X'Y$$

وكذلك لمصفوفة التباين والتباين المشترك معرفة كالآتي:-

$$V - Cov(b_{LS}) = \sigma^2{}_{\mu} (X'X)^{-1}$$

وبتعويض قيمة مقدر تباين العينة (S_e^2) نحصل على مصفوفة التباين والتباين المشترك المقدرة وكالآتي :-

$$V \hat{-} COV(b_{LS}) = S_e^2 (X'X)^{-1} \qquad , \qquad E(S_e^2) = \sigma_\mu^2$$

ويمكن تعريف مصفوفة التباين والتباين المشترك بدلالة القيم الذاتية وكالآتي:

$$MSE(b_{LS}) = \sigma_\mu^2 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i / \lambda_i^2 = \sigma_\mu^2 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{-1}$$

حيث ان:-

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \geq \lambda_k$$

وهي تمثل الجذور المميزة (**eigen value**) لمصفوفة المعلومات $(X'X)$.

ان الجذور المميزة يمكن ان تستخدم لقياس البعد لمعاملات الانحدار التقديرية عن قيمها الحقيقية. ان وجود حالة التعدد الخطي يكون مرادفاً للجذور المميزة الصغيرة وذلك لان (λ_i) الصغيرة سوف يقابلها تباين كبير جداً لموجة المعالم (b_{LS}).

وعليه فإن صيغة التقدير للمعالم في النموذج الخطي العام (GLM) يمكن اشتقاقها بإستخدام مضاعف لانكرانج (Langrange Multiplier) لغرض تصغير مجموع مربعات البواقي وطبقاً للقيد التالي :

$$\beta'_{RR}\,\beta_{RR} = \theta \qquad \text{Or}\ \|\beta_{RR}\|^2 = \theta$$

حيث ان :-

$$\theta = (X'X)^{-1}\lambda$$

وبإضافة كمية موجبة لعناصر قطر مصفوفة المعلومات ولتكن (C) على سبيل المثال فيكون:-

$$\mu'\mu = (Y - X\beta_{RR})'(Y - X\beta_{RR}) + C(\beta'_{RR}\beta_{RR} - \theta) \qquad \text{.......(7)}$$

وبأجراء التفاضل الجزئي للصيغة (7) وبالنسبة للموجه (β_{RR}) نحصل على :-

$$\frac{\partial\mu'\mu}{\partial\beta'_{RR}} = -2X'Y + 2X'X\,b_{RR} + 2C\,b_{RR} = 0$$

$$2(X'X + CI_K)b_{RR} = 2X'Y$$

$$b_{RR} = \begin{bmatrix} b_{1RR} \\ b_{2RR} \\ . \\ . \\ b_{KRR} \end{bmatrix} = (X'X + CI_k)^{-1}X'Y \qquad \text{.......(8)}$$

حيث ان :- $C \geq 0$

ان صيغة التقدير المعرفة بالمعادلة (8) تعرف بمقدر انحدار الحرف الاعتيادي (Ordinary Ridge Regression) ويرمز له (ORR) والتي تعتمد على اضافة كمية ثابتة قيمتها (C) لكل عنصر من عناصر المصفوفة $(X'X)$.

كذلك بين (هيرل وبنارد) امكانية اضافة قيم مختلفة الى كل عنصر من العناصر القطرية لمصفوفة $(X'X)$ بدلاً من قيمة واحدة ثابتة بعبارة اخرى اضافة (C_j) بحيث ان (j=1,2,...k) عليه فإن قيم (C_j) يجب اختيارها بحيث تجعل :

$$(Y - X^* \beta_{RR})'(Y - X^* \beta_{RR})$$

اقل ما يمكن وطبقاً للقيود الآتية:-

$$\beta^2{}_{RR1} = \theta_1 \quad , \quad \beta^2{}_{RR2} = \theta_2 \quad , \quad \beta^2{}_{RR3} = \theta_3 \quad , \quad \beta^2{}_{RRk} = \theta_k$$

حيث ان :-

$$\theta = (X'X)^{-1}\lambda \quad , \quad X^* = XV$$

V: تمثل مصفوفة متعامدة ، اعمدتها تمثل المتجهات المميزة المناظرة للجذور المميزة للمصفوفة $(X'X)$.

وبأستخدام مضاعف لانكرانج مع القيود المعرفة اعلاه نحصل على ما يأتي:-

$$\mu'\mu = (Y - X^* \beta_{RR})'(Y - X^* \beta_{RR}) + \sum C_j(\beta^2{}_{RRj} - \theta_j) \quad \text{.......... (9)}$$

وبالاشتقاق الجزئي للمعادلة (9) بالنسبة للموجة (β_{RR}) نحصل على ما يأتي:-

$$\frac{\partial \mu'\mu}{\partial \beta'_{RR}} = -2X^{*'}Y + 2X^{*'}X^* b_{RR} + 2C\, b_{RR} = 0$$

$$= (X'^* X^* + C) b_{RR} = X'^* Y$$

$$\therefore\ b_{GRR} = \begin{bmatrix} b_{1RR} \\ b_{21RR} \\ . \\ . \\ b_{KRR} \end{bmatrix} = (X^{*'}X^* + C)^{-1} X^{*'} Y \quad \text{.......... (10)}$$

حيث ان :-

C : مصفوفة من مرتبة $(K \times K)$ قطرية وغير سالبة أي ان $C_j \geq 0$ وان (j=1,2,....k) ويمكن تمثيلها بالشكل الآتي:-

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_K \end{bmatrix} \quad , \quad C_1 \neq C_2 \neq \ldots\ldots \neq C_K$$

ان الصيغة (10) تمثل مقدارات انحدار الحرف العامة Generalized Ridge Regression (GRR)

بعد ان تم الحصول على مقدرات انحدار الحرف يمكننا توضيح خواص تلك المقدرات وعلى النحو الآتي:-

أولاً : ان مقدرات انحدار الحرف متحيزة دائماً عندما تكون (**C>0**) ويمكن اثبات ذلك بالشكل التالي :-

$$\mathbf{b_{RR} = (X'X + CI_k)^{-1}\ X'Y}$$

وحيث ان :-

$$\mathbf{X'Y = (X'X)b_{LS}}$$

$$\mathbf{b_{RR} = (X'X + CI_k)^{-1}(X'X)b_{LS}}$$

$$\mathbf{(X'X + CI_k)b_{RR} = (X'X)b_{LS}}$$

$$\mathbf{(X'X)^{-1}(X'X + CI_K)b_{RR} = b_{LS}}$$

$$\mathbf{\left(I_K + C(X'X)^{-1}\right)b_{RR} = b_{LS}}$$

$$\mathbf{b_{RR} = \left(I_K + C(X'X)^{-1}\right)^{-1}b_{LS}}$$

$$\mathbf{b_{RR} = Zb_{LS}} \quad \text{.......... (11)}$$

حيث ان :-

$$\mathbf{Z = \left(I_K + C(X'X)^{-1}\right)^{-1}}$$

يتضح من الصيغة اعلاه ، ان مصفوفة **Z** تشير الى مقدار التحيز في مقدرات انحدار الحرف ، وعندما تكون قيمة (**C=0**) فإن مقدرات انحدار الحرف تكون مطابقة لأسلوب (**OLS**)، أي ان :-

$$\mathbf{b_{RR} = \left(X'X + OI_K\right)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'Y}$$

أي ان :-

$$\mathbf{b_{RR} \equiv b_{LS}}$$

ثانيا : مصفوفة تباين مقدرات انحدار الحرف (**Ridge Regression**) يكون كالآتي :-

$$\mathbf{V - COV(b_{RR}) = \sigma_{\mu}^{2}Z(X'X)^{-1}Z'}$$

ويمكن الثبات ذلك على النحو التالي:-

$$\mathbf{b_{RR} = Zb_{LS}}$$

$$V-COV(b_{RR}) = Z\ \ V\text{-}COV\ (b_{LS})Z'$$
$$= Z\ \ \sigma_\mu^2 (X'X)^{-1} Z'$$
$$= \ \sigma_\mu^2\ Z\,(X'X)^{-1} Z'$$

ثالثاً: متوسط مربعات الخطأ لمقدرات انحدار الحرف تكون كالآتي:

$$MSE(b_{RR}) = tr\big(V-COV(b_{RR})\big) + \big(Bias(b_{RR})\big)^2$$

$$= tr\big(V\text{-}COV\ \ (b_{RR})\big) + \beta'(Z-I_K)'(Z-I_K)\beta$$

$$= \sigma_\mu^2 \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j + C)^2} + C^2 \sum_{j=1}^{K} \frac{{\alpha_j}^2}{(\lambda_j + C)^2} \quad \text{.......... (12)}$$

حيث ان:-

$C>0, \quad j = 1,2,\ldots,k \quad ,\alpha_j = V_j{}' \beta$

اما عندما تكون (C=0) فان

$$MSE(b_{RR}) = \sigma_\mu^2 \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_j}{{\lambda_j}^2} + (0)^2 \sum_{j=1}^{K} \frac{{\alpha_j}^2}{(\lambda_j + 0)^2}$$

$$MSE(b_{RR}) = \sigma_\mu^2 \sum_{j=1}^{K} \frac{1}{\lambda_j} = \sigma_\mu^2 \sum_{j=1}^{K} {\lambda_j}^{-1}$$

ومن الصيغة(12)يمكن ملاحظة ان الحد الثاني من متوسط مربعات الخطا لمقـدرات انحـدار الحـرف يمثـل مربـع التحيز وهو دالة متزايدة في (C)ويكون مساويا للصفر عندما (C=0)، اما الحد الاول (حد التباين)فهو دالـة متناقصـة في (C).ولهذا نقبل بمقدار معين من التحيز مقابل تقليل تباين المقدرات.

رابعا:- $MSE(b_{RR}) < MSE(b_{LS})$

ويمكن اثبات ذلك بالشكل الآتي:-

$$MSE\,(b_{RR}) = \sigma_\mu^2 \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j + C)^2} + C^2 \sum_{j=1}^{K} \frac{{\alpha_j}^2}{(\lambda_j + C)^2}$$

$$\frac{\partial MSE}{\partial C} = -2\sigma_\mu^2 \sum_{j=1}^{K} \lambda_j (\lambda_j + C)^{-3}(1) + \sum_{j=1}^{K} \frac{(\lambda_j + C)^2 .2C\alpha_j^2 - C^2 {\alpha_j}^2 .2(\lambda_j + C)(1)}{(\lambda_j + C)^4}$$

$$= -2\sigma_\mu^2 \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_j}{(\lambda_j + C)^3} + 2C \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_j {\alpha_j}^2}{(\lambda_j + C)^3} \quad \text{.......... (13)}$$

يتضح من الصيغة(13)ان الحد الاول اقل من الصفر،ومنه يتبين بان تباين مقدرات انحدار الحرف يتناقص مع تزايد التحيز،وقد بين (هيرل و بنارد)(Heral - Bennard) بانه من الضروري ان تقع قيمة (C)ضمن المجال $\left(0 , \frac{\partial \sigma_{\mu}^{2}}{\alpha_{Max}}\right)$ لكي يكون:-

$$\frac{\partial MSE(b_{RR})}{\partial C} < 0$$

حيث ان:-

α_{Max} ∴ هي اكبر عنصر للمتجه $(\alpha = V'\beta)$

5.5 اختيار قيمة الثابت (C)

في هذا المبحث سوف نتطرق الى طرق اختيار قيمة الثابت (C) وكالاتي:-

اولا: اسلوب الرسم البياني او العرض البياني لاثر الحرف (Ridge Trace)

في حالة رسم المعالم والبالغ عددها (K)مقابل معلمة التحيز والتي تتراوح قيمتها بين (1،0). فاذا اظهرت المعالم المقدرة تذبذبات كبيرة بالنسبة الى القيم الصغيرة الى (C) دل ذلك الى ان الظاهرة المدروسة تعاني من وجود مشكلة التعدد الخطي ويتم أختيار قيمة (C) على اساس استقرار المعالم المقدرة عند ازدياد قيمة(C).

ان تحديد قيمة (C) بشكل بصري يؤدي الى مقدرات لا يمكن تحديد خصائصها،مثل هذا الاسلوب في الاختيار يتطلب مدى معين من القيم الممكنة لــ (C) بدلا من قيمة واحدة، اضافة الى ان اختيار قيمة معينة يعتمد على الخبرة والمعلومات المسبقة عن سلوك الظاهرة تحت البحث.

ثانيا: اسلوب المحاكاة

يقصد بالمحاكاة، محاولة ايجاد صورة طبق الاصل من أي نظام دون اخذ ذلك النظام، وغالبا ما يتم ذلك من خلال استخدام النماذج الرياضية والاحصائية وبمساعدة الحاسوب الالكتروني وبالتالي تشبيه ذلك النظام عمليا في ظروف عدم التاكد.

وبما ان هناك بعض الظواهر لا يمكن الوصول الى حلها بالطرق الرياضية المباشرة حتى وان كان بالامكان وضعها بشكل رياضي وذلك لكون حلها قد يسبب خسارة وكلفة عالية جدا. لذا قد يلجا الباحث الى استخدام انظمة جاهزة خاصة بالمحاكاة منها (نظام المحاكاة

العام)(General Purpose Simulation System) (GPSS) والذي غالبا ما يطبق في محاكاة المتغيرات المتقطعة مثل صفوف للانتظار وانظمة السيطرة على التخزين،في حين هناك انظمة محاكاة خاصة بالظواهر ذات المتغـيرات المسـتمرة او ما يسمى بانظمة المحاكاة الحركية (Dynamic System)وفـيما يـلي توضـيح لثلاثةاسـاليب في كيفيـة اختيـار قيمـة الثابت (C).

1- اسلوب (هيرل-بنارد) للمحاكاة (Heral-Bennard)

وبموجب هذا الاسلوب فان القيمة المثلى لـ (C) يمكن ان تحسب وفق الصيغة الاتية

$$C_j = \frac{\partial\sigma_\mu^2}{\alpha_j^2}$$

حيث ان :-

$$\alpha_j = V_j{}'\beta$$

وهذا الاسلوب يعطي قيم مختلفة لــ (C)، ولغرض الحصول على قيمة مفـردة لــ (C) يمكـن اسـتخدام الوسـط التـوافقي لقيم (C) أي ان:-

$$C = K\sigma_\mu^2 / \beta'\beta$$

وفي الجانـب التطبيقـي يمكـن اسـتخدام الصـيغة الاتيـة والحاصـل عليهـا مـن التقـدير الاولي (Initial Estimation) للظاهرة المدروسة.

$$C = \frac{KSe^2}{b_L' b_{L_s}} \quad , \quad E(S_e^2) = \sigma_\mu^2$$

K:عدد المتغيرات المستقلة.

2- اسلوب (لويس-ونك) للمحاكاة

وفق لهذا الاسلوب القيمة المثلى لــ (C) تمثل الوسـط التـوافقي لقـيم (C) موزونـة بـالقيم الذاتيـة للمصـفوفة ($X'X$) أي ان:-

$$C = \frac{KS_e^2}{\sum_{j=1}^{K} \lambda_j . \hat{\alpha}_j^2}$$

حيث ان:-

$$\hat{\alpha}_j = V_j' b_{Ls}$$

3- اسلوب مونت كارلو للمحاكاة (Monte Carlo Simulation)

تستخدم طريقة مونت كارلو في حل المسائل التي تعتمد على الاحتمالات والتي يصعب فيها عمل تجارب طبيعية وكذلك يصعب وضع صيغة رياضية معينة لها. لذا يستخدم اسلوب المحاكاة بواسطة العينة حيث تؤخذ عينة عشوائية من المجتمع لتمثيل الظاهرة بدلا من المجتمع الحقيقي، وعليه يستوجب تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير تحت البحث.

لقد برهن كل من (هـيرل و بنـارد)بـان اسـتخدام عـدة قـيم لــ (C) لايجـاد مقـدرات انحـدار الحـرف (Ridge Regression) يكون افضل في الحصول على اصغر (MSE) في حالة اسلوب (OLS)وتعتمد قيمة (C) المفترضة على ما ياتي:-

1- تباين حد الخطأ العشوائي (σ_{μ}^{2}) .

2- الارتباطات بين المتغيرات التوضيحية، ويتطلب ذلك تحويل مصفوفة المعلومات $(X'X)$ الى قـيم معياريـة بعبارة اخرى يعبر عنها بمصـفوفة الارتباطـات.وكـذلك تحويـل موجـة $(X'Y)$ الى موجـة الارتبـاط بـين المتغـير المعتمد وكل متغير توضيحي.

3- تحديد المدى لموجة المعالم المطلوب تقديرها ويتم ذلك وفق العلاقة التالية:-

$$\theta = b_{Ls}^{'} b_{Ls} - S_e^2 \sum_{j=1}^{K} \lambda_j^{-1}$$

حيث ان :-

λ_j:- تمثل القيم الذاتية لمصفوفة الارتباطات بين المتغيرات التوضيحية.

b_{Ls}:- يمثل مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)والذي يشمل $(b_1, b_2, ..., b_k)$

S_e^2:- تمثل مقدار تباين العينة.

وبعد تشخيص المؤشرات اعلاه، نفرض عدة قيم لكل منها ثم يستخدم اسلوب المحاكاة لاجراء التجارب المعتمـدة على تغير احد هذه المؤشرات مع ثبوت العوامل الاخرى وتكرر التجربة عدة مـرات حتـى الحصـول عـلى قـيم (MSE) تقـل كثيرا عما هو عليه في حالة التطبيق الاولي لاسلوب (OLS) واخيرا لا بد من القول بانه لا يمكن اعطاء او تحديد قيمـة ثابتـة لـ (C) تضمن الحصول على اقل (MSE) وتبقى عملية اختيار الثابت (C) معتمدة على الخبرة والمعلومات المسبقة.

5.6 مقدرات المركبات الرئيسية

تنطوي طريقة المركبات الرئيسية (**Principle Component**)على تحويل مجموعة من المتغيرات المرتبطة خطيا ($X_1,X_2,...,X_k$) الى مجموعة جديدة من المركبات الرئيسية ($P_1,P_2,...,P_k$)على هيئة تراكيب خطية مشتقة من المتغيرات التوضيحية (**X**)لتحل محلها بحيث تكون مؤهلة لتفسير معظم التباين الكلي للقيم الاصلية وتكون هذه المركبات متعامدة (**Orthogonal**) أي غير مرتبطة فيما بينها، ويمكن اجراء تحليل المركبات الرئيسية باستخدام مصفوفة التباين والتباين المشترك عندما تكون جميع المتغيرات التوضيحية (**X**)لها وحدات القياس نفسها في حين تستخدم مصفوفة الارتباطات البسيطة عندما تكون جميع المتغيرات التوضيحية (**X**)تختلف في وحدات قياسها.

كما بينا سابقا تعد طريقة المركبات الرئيسية وسيلة للتخلص من مشكلة التعدد الخطي التام بين المتغيرات التوضيحية (**X**)في نموذج الانحدارالخطي العام ويمكن توضيح ذلك من خلال الاتي:-

نفرض ان لدينا نموذج الانحدار الخطي العام المرقم(**6**) حيث ان كل من (**X,Y**)قد تم قياسها حول متوسطانها بحيث ان ($X'X$)و ($X'Y$) تمثل مصفوفات معاملات الارتباط.

ان النموذج الوارد في المعادلة(**6**)يعتبر بدلالة المتغيرات التوضيحية (**X**)المرتبطة(غير المتعامدة-**Non Orthogonal**)، ولغرض تحويل المتغيرات التوضيحية (**X**) المرتبطة الى متغيرات جديدة(**P**)غير مرتبطة(**Orthogonal**)،توجد لدينا مصفوفة متعامدة ولتكن (**V**) تحقق الشروط الاتية:-

$$1 - V'V = VV' = I$$
$$2 - V'(X'X)V = \Lambda$$

حيث ان:-

Λ :- مصفوفة قطرية ذات مرتبة(**KxK**) للجذور المميزة (λ_j) لمصفوفة المعلومات ($X'X$)، وان ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 ... \geq \lambda_k$).

V:- مصفوفة ذات مرتبة(**KxK**) متعامدة(**Orthogonal**) اعمتدتها تمثل المتجهات المميزة المعدلة(**Normalized Chara-Vector**) للمصفوفة($X'X$).

واعتمادا على المصفوفةV يتم الحصول على مجموعة جديدة من المتغيرات التوضيحية على هيئة تراكيب خطية تدعى بالمركبات الرئيسية (P)(Principle Component) وتكتب بالشكل التالي:-

$$P_j = \sum_{j=1}^{K} V_j X_K \quad \text{......(14)}$$

ويمكن كتابته بصيغة المصفوفات كالآتي:-

P=XV

حيث ان:-

P:- تمثل مصفوفة المركبات الرئيسية$(P_1,P_2,...,P_k)$.

X:- تمثل مصفوفة المتغيرات التوضيحية$(X_1,X_2,...,X_k)$.

V:- تمثل مصفوفة الموجهات المميزة المعدلة للمصفوفة ($X'X$)

وتكون هذه التراكيب الخطية على هيئة دوال خطية بدلالة المتغيرات التوضيحية المرتبطة (X')يتم من خلالها الحصول على متغيرات توضيحية جديدة (P)غير مرتبطة تدعى بالمركبات الرئيسية (Principle Component).

لنفرض ان :-

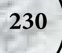
$$P = XV$$
$$\alpha = V'\beta$$

عليه بالامكان كتابة النموذج المرقم(6)بدلالة المركبات الرئيسية (P) أي بدلالة المتغيرات التوضيحية الجديدة المتعامدة كالاتي:-

$$Y = P\alpha + \mu \quad \text{......(15)}$$

حيث ان:-

P: مصفوفة من مرتبة (n×K) للمركبات الرئيسية (المتغيرات المتعامدة وبناءا على ذلك فان المركب الرئيسي (P) يكتب بالشكل التالي:-



$$P_j = XV_j$$

وان:-

$$P_j'P_j = \begin{cases} 0 & ,\text{if } i \neq j \\ \lambda_j & ,\text{if } i = j \end{cases}$$

حيث ان:-

*:-تمثل تباينات العينة للمركبات الرئيسية(P) وان λ_j يعتبر اكبر جذر مميز ذي الرتبة (j) للمصفوفة ($X'X$).

ولغرض ايجاد مقدرات المركبات الرئيسية لموجه المعالم (β) في النموذج (6)والذي يعاني من مشكلة التعدد الخطي نقوم بحذف واحد او اكثر من المركبات الرئيسية (P_j)،ومن ثم نطبق طريقة المربعات الصغرى(OLS) على النموذج الناتج بعد الحذف،واخيرا اجراء التحويل الخلفي الى مجال المعلمة الاصلي. ولتوضيح ذلك:-

نفترض بأن المصفوفة $(X'X)$ هي r بحيث ان آخر (k-r) من عناصر المصفوفة القطرية تساوي الى الصفر او قريبة من الصفر اذا كانت المصفوفة $(X'X)$ قريبة من الاحادية.

لذا يتم تجزأة المصفوفة المتعامدة V بالشكل الاتي:-

$V=(V_r \ : \ V_{n-r})$

وعملية التقسيم اعلاه تستوجب اجراء تقسيم مماثل على المصفوفة (Λ) وكالآتي:-

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & \Lambda_{k-r} \end{bmatrix}$$

حيث ان :-

Λ_r : تمثل مصفوفة ذات مرتبة $(r \times r)$.

Λ_{k-r} : تمثل مصفوفة ذات مرتبة $(k-r)\times(k-r)$.

عليه مقدرات المركبات الرئيسية باستخدام طريقة (OLS) كالآتي:-

$$\mu'\mu = (y-\rho\alpha)'(Y-\rho\alpha)$$

$$= Y'Y - Y'\rho\alpha - \alpha'\rho'Y + \alpha'\rho'\rho\alpha$$

$$= Y'Y - 2\alpha'\rho'Y + \alpha'\rho'\rho\alpha$$

$$\frac{\partial\mu'\mu}{\partial\alpha'} = -2\rho'Y + 2\rho'\rho\alpha\wedge = 0$$

$$\alpha^{\wedge} = (\rho'\rho)^{-1}\rho'Y \quad \text{.......(16)}$$

وبما ان

$$\rho = XV$$

وبتعويض قيمة (ρ) تصبح المعادلة (16) بالشكل التالي:-

$$\alpha^{\wedge} = \Lambda_r^{-1} \ V_r X Y \quad \text{.......... (17)}$$

وبالتعويض عن المصفوفتين (V, Λ) نحصل على ما يأتي:-

$$\begin{bmatrix} \alpha^{\wedge}{}_r \\ \alpha^{\wedge}_{k-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & \Lambda_{k-r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_r \\ V_{k-r} \end{bmatrix} X'Y \quad \text{.......... (18)}$$

وعلى افتراض ان (Λ_{k-r}^{-1}) مساوية للصفر ، عليه فان مقدرات طريقة المربعات الصغرى (OSL) الى (α_r) تكتب بالشكل الآتي :-

$$\alpha^{\wedge}{}_r = \Lambda_r^{-1} V_r X' Y \quad \text{.......... (19)}$$

وبما ان لدينا في الجانب التقديري :

$$\alpha^{\wedge}{}_r = V'_r \, b$$

وعليه يمكننا القول ان مقدرات المركبات الرئيسية (Principle components) تعطى وفق الصيغة الآتية :-

$$b_{p.c} = V_r \alpha_r^{\wedge} \quad \text{.......... (20)}$$

وبتعويض المعادلة (19) بالمعادلة (20) نحصل على الآتي:-

$$b_{p.c} = V_r \Lambda_r^{-1} V_r X' Y \quad \text{.......... (21)}$$

والمعادلة (21) تمثل مقدرات متجه المعالم باستخدام طريقة المركبات الرئيسية والتي يمكن كتابتها بالشكل الآتي:-

$$b_{p.c} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{-1} V_i' X' Y V_i - \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i^{-1} V_i' X' Y V_i$$

$$b_{p.c} = b_{LS} - \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i^{-1} V_i' X' Y V_i \quad \text{.......... (22)}$$

ويمكننا هنا توضيح خواص مقدرات المركبات الرئيسية (P.C) وكالآتي:-

أولاً: تعتبر مقدرات طريقة المركبات الرئيسية متحيزة ، أي إن:-

$$E(b_{p.c)}=\beta_{LS}-\sum_{i=r+1}^{k}(V_i^{'}\beta)V_i$$

ويمكن إثبات ذلك كالآتي :

بافتراض ان

$$\alpha_{k-r}^{\wedge}=0$$

$$b_{p.c}=V_r\alpha_r^{\wedge}$$

$$b_{p.c}=V_r\Lambda_r^{-1}V_r^{'}X^{'}Y$$

$$b_{p.c}=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-1}V_i^{'}X^{'}YV_i$$

$$b_{p.c}=b_{LS}-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-1}V_i^{'}X^{'}YV_i$$

وبأخذ التوقع الرياضي للطرفين نحصل إلى ما يأتي :-

$$E(b_{p.c})=E(b_{LS})-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-1}V_i^{'}X^{'}E(Y)V_i$$

$$\beta_{p.c}=\beta_{LS}-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-1}V_i^{'}X^{'}(\rho\,\alpha)\,V_i$$

$$\beta_{p.c}=\beta_{LS}-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-1}V_i^{'}X^{'}XV_i\alpha\,V_i$$

$$\beta_{p.c}=\beta_{LS}-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-1}.\lambda_i^{-1}\,\alpha\,V_i$$

$$\beta_{p.c}=\beta_{LS}-\sum_{i=1}^{r}\alpha\,V_i$$

$$\beta_{p.c}=\beta_{LS}-\sum_{i=1}^{r}(V_i^{'}\beta)\,V_i$$

عليه فان مقدرات المركبات الرئيسية (P.C.) متحيزة عندما تكون :

$$V_i^{'}\beta\neq 0 \qquad , \quad \forall\ i=1,2,..,K$$

وتعتبر غير متحيزة فيما عدا ذلك.

ثانياً: ان مصفوفة تباين والتباين المشترك لمقدرات المركبات الرئيسية (P.C.) يكتب بالصيغة الآتية:-

$$V - Car(b_{p.c}) = \sigma_u^2 \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} V_i V_i'$$

ويمكن اثباته بالشكل الاتي:

$$b_{p.c} = V_r \Lambda_r^{-1} V_r' X' Y$$

$$V - COV(b_{p.c}) = V_r \Lambda_r^{-1} V_r' X' Var(Y) X V_r \Lambda_r^{-1} V_r'$$

$$V - COV(b_{p.c}) = V_r \Lambda_r^{-1} V_r' X' (\sigma_u^2 In) X V_r \Lambda_r^{-1} V_r'$$

$$V - COV(b_{p.c}) = \sigma_u^2 V_r \Lambda_r^{-1} V_r' X' X V_r \Lambda_r^{-1} V_r'$$

$$V - COV(b_{p.c}) = \sigma_u^2 V_r \Lambda_r^{-1} \Lambda_r \Lambda_r^{-1} V_r'$$

$$Var(b_{p.c}) = \sigma_u^2 V_r \Lambda_r^{-1} V_R'$$

$$Var(b_{p.c}) = \sigma_u^2 \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} V_i V_i'$$

وهو بدلالة القيم والجذور المميزة.

ثالثاً: ان متوسط مربعات الخطأ(MSE) لمقدرات المركبات الرئيسية يكتب بالشكل الآتي:-

$$MSE(b_{p.c}) = tr\left(V - Cor(b_{p.c})\right) + \left(Bias(b_{p.c})\right)^2$$

$$MSE(b_{p.c}) = \sigma_u^2 \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} + \sum_{i=r+1}^{k} (V_i' \beta)^2$$

ويعتبر الحد الثاني من المعادلة (حد مربع التحيز) دالة متناقصة ي (r).

رابعاً: ان متوسط مربعات الخطأ لمقدرات المركبات الرئيسية (P.C.) تكون دائماً اقل من متوسط مربعات الخطأ لمقدرات المربعات الصغرى (OLS) أي ان :-

$$MSE(b_{p.c}) < MSE(b_{LS})$$

وذلك عندما يكون :

$$\sigma_u^2 \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} > \sum_{i=r+1}^{k} (V_i' \beta)^2$$

5.7 معايير تحديد عدد المركبات الرئيسية

عادة يكون عدد المركبات الرئيسية (P.C.) التي يمكن استخلاصها من المتغيرات التوضيحية (**X**) اقل من هذه المتغيرات أي ان (r<k) ، وهناك عدة معايير (اختبارات) قد اقترحت لتحديد عدد المركبات الرئيسية التي ينبغي ابقاؤها في التحليل، ومن هذه المعايير نذكر الآتي:-

1- <u>معيار كيسر (Kaiser):</u>

لقد اقترح هذا المعيار من قبل (Guttman) وتم تطويره من قبل كيسر (Kaiser) ، ويعتبر تطبيق هذا المعيار بسيط للغاية ، ينطوي على ان المركبات الرئيسية (P.C.) التي جذورها المميز(اكبر من الواحد الصحيح) هي التي تبقى في التحليل ، أي ان:-

((إذا كان $\lambda_j > 1$ فان $\mathbf{P_j}$ يبقى في التحليل))

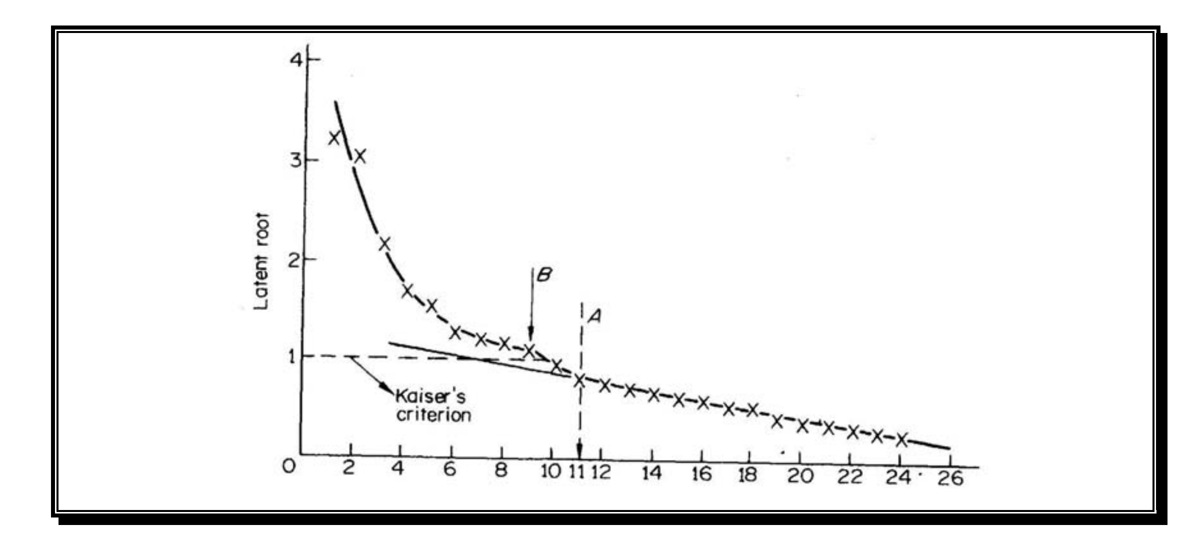
وقد اضاف الباحث كتيل (Cattel) شرطاً الى هذا المعيار ، حيث اقترح الآتي (يفضل استخدام هذا المعيار عندما يكون عدد المتغيرات التوضيحية **(X)** ما بين (20-50).

2- <u>معيار كتيل (Cattell)</u>

ان هذا الاختبار يدعى احياناً بأختيار الحجر (SCREE* test) ، حيث يستند الاختبار على رسم الجذور المميزة (λ) ضد رتبة المكونات الرئيسية(**P**)المستخلصة ، ويعتمد شكل المنحنى الناتج على تحديد عدد المكونات الرئيسية التي ستبقى في التحليل.

وينطوي هذا الاختبار على انه (تبقى المركبات الرئيسية(**P**) في التحليل الى الحد الذي يكون فيه المنحنى متقوساً ، وتستبعد المركبات الرئيسية (**P**) التي يتحول عندها المنحنى الى خط مستقيم.

أي ان عند نقطة التحول هذه تبقى (يتحدد) عدد المركبات الرئيسية التي ستبقى في التحليل ، وبعد تلك النقطة تصبح المركبات الرئيسية غير معتمدة . عليه فان عدد المركبات الرئيسية (**P**) التي ستبقى في التحليل يكون (11) مركب رئيسي للمثال الذي يوضحه الشكل الآتي :



شكل رقم (6)

3- **معيار بارتليت (Bartlet)**

يفترض هذا المعيار بإن **(r)** من الجذور المميزة من اصل **(k)** من الجذور حيث ان **(r<k)** هي كبيرة ومختلفة بكفاية لكي تبقى في التحليل و السؤال المطروح:

هل ان ما تبقى من الجذور والتي تكون متساوية وذات أهمية قليلة جداً وعددها ***(k-r)*** هي كافية بما ينبغي بقاؤها في التحليل؟

وللإجابة على السؤال اقترح (بارتليت) **(Bartlet)** وكتأكيد لاختبار كيسر **(Kaiser)** الاحصاءة الآتية :

$$\mathbf{X^2* = n\ln\left[(\lambda_{r+1}.\lambda_{r+2}. \ ... \ .\lambda_k)^{-1}\left(\frac{\lambda_{r+1}+....+\lambda_k}{k-r}\right)^{k+r}\right]}$$

وهي تتوزع تقريباً توزيع مربع كأي (X^2) بدرجة حرية **((1/2 (k-r-1)(k-r+2)** ان احصاءة الاختبار اعلاه تختبر فرضية العدم الآتية:

$$\mathbf{H_0 : \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} \ \ ... \ \ = \lambda_k}$$

فاذا كانت $\mathbf{X^{*2} > X^2_{tab}}$ يتم رفض فرضية العدم (H_0) وهذا يعني بأن هناك جذور مميزة (λ) قد استبعدت ويفترض ضمها الى بقية الجذور المميزة ، مما يستوجب اضافة مركبات اخرى الى مجموعة المركبات الرئيسية التي تم ابقاؤها في التحليل.

* SCREE : مصطلح جيولوجي يمثل الجزء الاسفل من الصخرة المنحدرة.

التمارين



1 تكلم بشكل مفصل عن آثار مشكلة التعدد الخطي ، وطرق معالجتها في بيانات العينة ، ثم بين كيفية الاختبار لوجودها في الواقع التطبيقي.

2 لماذا تحدث مشكلة التعدد الخطي في نموذج الانحدار الخطي، وما هي أنواعه؟ وضح ذلك بالتفصيل.

3 للنموذج الخطي الاتي:

$$Y_i=\beta_o+\beta_1X_i+\beta_2X_2+U_i$$

$$i=1,\ 2,\ \dots,\ n$$

بافتراض وجود علاقة بين المتغيرين (X_2 , X_1)، ما هي الطريقة الأنسب لتقدير معالم النموذج أعلاه في الحالات الاتية (1): وجود علاقة غير تامة بين المتغيرين (X_2, X_1) ، (2) وجود علاقة تامة بين المتغيرين (X_2, X_1).

4 البيانات التالية تمثل قيمة الانتاج (Y_i) والعمل (L_i) ورأس المال (K_i) ، أخذت من عينة ذات حجم (20) معمل.

K_i	L_i	Y_i	K_i	L_i	Y_i
80	30	115	90	15	82
30	60	64	40	39	73
60	100	140	20	99	58
40	95	85	60	12	68
20	75	56	60	42	98
90	90	150	30	95	83
30	25	65	60	45	100
10	80	36	80	36	110
40	12	57	80	40	120
20	65	50	40	65	95

المطلوب:

1- أختبر لوجود مشكلة التعدد الخطي.

2- عالج آثار هذه المشكلة في حالة تقدير معالم صيغة كوب-دوكلاس للانتاج.




القيود المتطابقة
Equality Restriction

6.1 المقدمة

تعبر القيود المتطابقة عن المعلومات النظرية التي يتم الحصول عليها من خارج نطاق عينة البحث والتي يتم توظيفها في عملية تقدير معالم النموذج المدروس، بعبارة اخرى استخدام الفروض المتعلقة بالنموذج المدروس والتي غالبا ما تزودنا بها النظرية الاقتصادية، الى جانب بيانات العينة الخاصة بالمتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة في تقدير معالم النموذج. في الجزء (6-2) ادناه سوف نناقش حالة توفر قيد واحد متطابق واسلوب اختزال المتغيرات في التقدير في حين خصص الجزء (6-3) لمناقشة اسلوب المربعات الصغرى المقيدة كحالة عامة للتقدير في حالة توفر اكثر من قيد متطابق.

6.2 القيود المتطابقة واختزال المتغيرات

في حالة توفر قيد واحد عن احد معالم النموذج، عندها يمكن توظيفه الى جانب بيانات العينة في تقدير المعالم، حيث ان توسيع العينة بمثل هذه المعلومة سوف يؤدي وبدون ادنى شك الى معالجة مشكلة التعدد الخطي، بالرجوع إلى الفصل الثاني وبالذات إلى الجزء الخاص بتحليل دوال الانتاج، حيث تم تشخيص ثلاثة حالات لغلة الحجم في نموذج انتاج كوب-دوكلاس التالي:

$$Y_t = \beta_0 X_{1t}^{\beta_1} X_{2t}^{\beta_2} e^{U_t} \quad \text{.......... (1)}$$

وهي

1- تزايد غلة الحجم وفيها ، $\beta_1 + \beta_2 > 1$

2- تناقص غلة الحجم وفيها ، $\beta_1 + \beta_2 < 1$

3- ثبات غلة الحجم وفيها ، $\beta_1 + \beta_2 = 1$

بقدر تعلق الامر بتقدير معالم نموذج الانتاج رقم (1) ، فإذا تبين بأن تغير رأس المال الثابت (X_{2t}) والعمل (X_{1t}) بنسبة ثابتة سوف يؤدي إلى تغير الانتاج (Y_t) بنفس النسبة ، أي ان المنشأة تعمل وفق عائد حدي ثابت ، بعبارة اخرى $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ، بتوظيف هذا القيد المتطابق إلى جانب بيانات العينة في اختزال المتغيرات المستقلة ، يصبح نموذج انتاج كوب-دوكلاس كالآتي:

$$Y_t = \beta_0 \, X_{1t}^{\beta_1} \, X_{2t}^{1-\beta_1} \, e^{U_t}$$

بإعادة الترتيب والتقسيم على رأس المال ، نحصل على :

$$\frac{Y_t}{X_{2t}} = \beta_0 \left(\frac{X_{1t}}{X_{2t}}\right)^{\beta_1} e^{U_t} \quad \text{.......... (2)}$$

صيغة نموذج الانتاج أعلاه ، أختزل أحد متغيراتها المستقلة حيث اصبح فيها نسبة الانتاج الى رأس المال دالة إلى نسبة العمل إلى راس المال وبالتالي التخلص من مشكلة التعدد الخطي.

لغرض تقدير معالم نموذج الانتاج رقم (2) أعلاه ، يستوجب تحويلها إلى الشكل الخطي التالي:

$$\ln\left(\frac{Y_t}{X_{2t}}\right) = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln\left(\frac{X_{1t}}{X_{2t}}\right) + U_t$$

أو

$$\ln Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 \ln X_t + U_t \quad \text{.......... (3)}$$

حيث ان

$$\ln Y_t^* = \ln\left(\frac{Y_t}{X_{2t}}\right) \;, \quad \ln X_t = \ln\left(\frac{X_{1t}}{X_{2t}}\right) \;, \; \beta_0^* = \ln \beta_0$$

التقدير حول نقطة المتوسط للمعلمة (β_1) في النموذج رقم (3) والمعاد كتابته في أدناه:

$$\ln y_t = \beta_1 \ln x_t + U_t \quad \text{.......... (4)}$$

$$\ln y_t = \ln Y_t^* - \overline{\ln Y^*}, \; \ln x_t = \ln X_t - \overline{\ln X}$$

يعطى كالاتي

$$b_{1RV} = \frac{\sum \ln y_t \ln x_t}{\sum (\ln x_t)^2}$$

وبتوظيف القيد يمكن الحصول على تقدير لمعلمة رأس المال .

$b_2 = 1 - b_{1RV}$

التقدير (b_{1RV}) غير متحيز وبنفس الوقت أكثر كفاءة من التقدير الحاصل عليه من النموذج قبل الاختزال ، وذلك لان

$$b_{1RV} = \frac{\sum \ln y_t \ln x_t}{\sum (\ln x_t)^2}$$

$$E(b_{1RV}) = \frac{\sum \ln x_t \, E(\ln y_t)}{\sum (\ln x_t)^2} = \frac{\beta_1 \sum (\ln x_t)^2}{\sum (\ln x_t)^2} = \beta_1$$

$$\therefore E(b_{1RV}) = \beta_1 \Rightarrow \text{Unbaised}$$

وكما هو معلوم تباين المقدر (b_{1RV}) الحاصل عليه من النموذج المختزل رقم (4) يعطى كالاتي:

$$Var(b_{1RV}) = \sigma_u^2 \Big/ \sum (\ln x_t)^2$$

في حين تباين نفس المعلمة في النموذج (1) ، بعد تحويله إلى الشكل الخطي وتقدير تباين معالمه وفق اسلوب التقدير حول نقطة المتوسط يعطى كالاتي:

$$Var(b_{1LS}) = \frac{\sigma_u^2 \sum (\ln x_{2t})^2}{\sum (\ln x_{1t})^2 \sum (\ln x_{2t})^2 - \left(\sum \ln x_{1t} \ln x_{2t}\right)^2}$$

$$\therefore eff\,(b_{1RV}) = \frac{Var(b_{1RV})}{Var(b_{1LS})}$$

$$= \frac{\sum (\ln x_{1t})^2 \sum (\ln x_{2t})^2 - \left(\sum \ln x_{1t} \ln x_{2t}\right)^2}{\sum (\ln x_{2t})^2 \sum (\ln x_t)^2}$$

$$\therefore eff\,(b_{1Rv}) = \frac{\left(1 - r_{x_1 x_2}^2\right) \sum (\ln x_{1t})^2}{\sum (\ln x_t)^2} < 1$$

يتضح من صيغة الكفاءة أعلاه ، المعلمة المقدرة (b_{1RV}) في النموذج المختزل أحد متغيراته أكثر كفاءة من المعلمة المقدرة (b_{1LS}) في النموذج الاصلي والذي يعاني من وجود مشكلة التعدد الخطي بين متغيراته المستقلة.

6.3 تقديرات المربعات الصغرى المقيدة (RLS)

في الجزء السابق (6-2) تم التطرق إلى معالجة مشكلة التعدد الخطي، وذلك من خلال توظيف البيانات أو المعلومات المسبقة والتي اخذت هيئة قيد متطابق واحد ، حيث تم تطبيق اسلوب اختزال بعض متغيرات النموذج في عملية التقدير ، في هذا الجزء سوف نتناول حالة

توفر أكثر من قيد متطابق على معالم النموذج المدروس ، وبالتالي عملية تقدير المعالم باستخدام المربعات الصغرى المقيدة **Restricted Least Square (RLS)** ، فإذا رمزنا إلى عدد معالم النموذج بـ **(k+1)** ، عندها يمكن استخدام **(J)** من القيود المتطابقة ، بحيث أن **(J<k+1)** إلى جانب بيانات العينة الخاصة بالمتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة في النموذج الخطي التالي:

$$\mathbf{Y = X\beta + U} \quad \text{........} (5)$$

حيث ان:

$$\mathbf{U \sim N\left(0, \sigma_u^2 I_n\right), \; E\left(U_i U_j\right) = 0 \quad \forall \quad i \neq j}$$

فإذا توفرت قيود متطابقة حول معالم النموذج أعلاه ، كان يكون مثلا الحد الثابت للنموذج مساويا قيمة معينة معطاة ولنفرض أن $\mathbf{\beta_0 = G}$ ، وأن المجموع النهائي لكافة المعالم المقدرة مساويا إلى الواحد الصحيح ، أي ان $\mathbf{\sum_{j=0}^{k} \beta_j = 1}$ وأخيرا أن الميل الحدي الأول مساويا إلى الميل الحدي الثاني ، أي أن $\mathbf{\beta_1 = \beta_2}$ أو $\mathbf{\beta_1 - \beta_2 = 0}$. وبما ان هناك أكثر من قيد متطابق ، لذا لا يمكن تطبيق أسلوب أختزال المتغيرات في عملية التقدير ، عليه فإن توظيف مثل هذه القيود يستوجب تطبيق أسلوب المربعات الصغرى المقيدة **(RLS)** ، والاسلوب الاخير هذا يتطلب إعادة صياغة القيود الثلاثة أعلاه بأستخدام المصفوفات والموجهات وكالاتي:

$$\underset{\mathbf{R}}{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0_k} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1_k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0_k} \end{bmatrix}} \underset{\boldsymbol{\beta}}{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{r}}{\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}$$

حيث ان

(R) تمثل مصفوفة للقيود المفروضة على معالم النموذج وذات رتبة **((J × (k+1))** .

(β) يمثل موجه المعالم وذات رتبة **((k + 1) × 1)** .

(r) تمثل موجه معلوم لقيم القيود المتطابقة وذات رتبة **(J × 1)** .

بتوظيف القيود أعلاه ، جنبا إلى جنب مع بيانات العينة المتمثلة بمشاهدات المتغير المعتمد والمتغيرات المستقلة للنموذج رقم (5) أعلاه وبأتباع أسلوب المربعات الصغرى ، لجعل الاخطاء الناتجة من الفرق بين القيمة المشاهدة والقيمة التقديرية للمتغير المعتمد ، أقل ما يمكن نحصل على

$$\mathbf{U'U = \left(Y - X\beta\right)'\left(Y - X\beta\right) - 2\lambda'\left(R\beta - r\right)}$$

حيث ان (λ) تمثل مضاعف لانكراج **(Lagrang multiplier)** وذات رتبة **(J x 1)**

$$\therefore U'U = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta - 2\lambda'(R\beta - r)$$

وبأخذ التفاضل الجزئي الأول بالنسبة إلى موجه β و λ نحصل على

$$\frac{\partial U'U}{\partial \beta'} = -2X'Y + 2X'Xb_{RLS} - 2\hat{\lambda}'R = 0 \quad \text{.......... (6)}$$

$$\frac{\partial U'U}{\partial \lambda} = -2(Rb_{RLS} - r) = 0 \quad \text{.......... (7)}$$

من العلاقة رقم (6) أعلاه نحصل على

$$X'Xb_{RLS} = X'Y + R'\hat{\lambda}$$

$$\therefore b_{RLS} = (X'X)^{-1}X'Y + (X'X)^{-1}R'\hat{\lambda}$$

$$b_{RLS} = b_{OLS} + (X'X)^{-1}R'\hat{\lambda} \quad \text{.......... (8)}$$

وبالضرب المسبق بمصفوفة القيود (R) ، نحصل على،

$$Rb_{RLS} = Rb_{OLS} + R(X'X)^{-1}R'\hat{\lambda}$$

من العلاقة رقم (7)

$$Rb_{RLS} = r$$

بالتعويض

$$r = Rb_{OLS} + R(X'X)^{-1}R'\hat{\lambda}$$

$$\therefore r - Rb_{OLS} = R(X'X)^{-1}R'\hat{\lambda}$$

بالضرب المسبق بمعكوس المصفوفة $\left[R(X'X)^{-1}R'\right]$ ، نحصل على قيمة $(\hat{\lambda})$ وكالاتي:

$$\hat{\lambda} = \left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(r - Rb_{OLS})$$

بالتعويض في الصيغة رقم (8) ، نحصل على

$$b_{RLS} = b_{OLS} + (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(r - Rb_{OLS}) \quad \text{.......... (9)}$$

حيث ان

b_{RLS} يمثل موجه للمعالم المقدرة بطريقة (RLS)

b_{OLS} يمثل موجه للمعالم المقدرة بطريقة (OLS)

من الصيغة رقم (9) أعلاه ، يتضح بأن تقديرات المربعات الصغرى المقيدة ، تعتمد على التقدير الاولي لمعالم العلاقة ، بعبارة اخرى تطبيق أسلوب (OLS) أولا على بينات العينة للحصول على

$$\mathbf{b_{OLS}} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}$$

ثم توظيف القيود المتمثلة بالمصفوفة (R) وقيم هذه القيود والمتمثلة بالموجه (r) للحصول على التقـديرات المقيـدة . علـما بأن تقديرات المربعات الصغرى المقيدة غير متحيزة ويمكن أثبات ذلك كالاتي:

لدينا

$$\mathbf{b_{OLS}} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}(\mathbf{X}\beta + \mathbf{U})$$

$$\mathbf{b_{OLS}} = \beta + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U}$$

تعويض النتيجة أعلاه قي صيغة التقدير المقيد ، صيغة رقم (9) ، نحصل على :

$$\mathbf{b_{RLS}} = \beta + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\left[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\right]^{-1}\left[\mathbf{r} - \mathbf{R}\left(\beta + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U}\right)\right]$$

$$\therefore \mathbf{b_{RLS}} = \beta + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\left[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\right]^{-1}\left[\mathbf{r} - \mathbf{R}\beta - \mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U}\right]$$

وبما ان $\mathbf{r} - \mathbf{R}\beta = \mathbf{0}$ أذن

$$\therefore \mathbf{b_{RLS}} = \beta + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U} - (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\left[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\right]^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U}$$

وبما أن $\mathbf{E}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$

$$\therefore \mathbf{E}(\mathbf{b_{RLS}}) = \beta \Rightarrow \textbf{Unbiased}$$

النتيجة أعلاه توضح بأن تقديرات (RLS) غير متحيزة ، ولاشتقاق صيغة للتباين والتباين المشترك لهذه المعالم المقيدة ، لا بـد من إعادة كتابة العلاقة أعلاه كالاتي:

$$\mathbf{b_{RLS}} - \beta = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U} - (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\left[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\right]^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U}$$

$$\therefore \mathbf{b_{RLS}} - \beta = \left\{\mathbf{I} - (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\left[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}\right]^{-1}\mathbf{R}\right\}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'U} \quad \text{..............................(10)}$$

بالتعويض في الصيغة العامة للتباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة التالية:

$$Var-Cov\left(b_{RLS}\right)=Var-Cov\left(\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\\vdots\\b_k\end{bmatrix}\right)_{RLS}=E\left[\left(b_{RLS}-\beta\right)\left(b_{RLS}-\beta\right)'\right]$$

نحصل على

$$Var-Cov\left(b_{RLS}\right)=\left\{I-(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right\}(X'X)^{-1}X'E(UU')X$$
$$(X'X)^{-1}\left\{I-(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\right\}'$$

وحسب فرضية التجانس $E\left(UU'\right)=\sigma_u^2 I_n$ ، بالتعويض وإعادة الترتيب ، نحصل على:

$$Var-Cov\left(b_{RLS}\right)=\sigma_u^2\left\{(X'X)^{-1}-(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}\right\} \quad .....(11)$$

حيث ان

$$E\left(S_e^2\right)=\sigma_u^2$$

وفي الجانب التطبيقي ، يقدر تباين العينة وفق الصيغة التالية:

$$S_e^2=\frac{Y'Y-b'_{RLS}XY}{n-k-1}$$

6.4 مقارنة بين طريقة (RLS) و (OLS) - كفاءة التقدير

يتضح من صيغة التباين والتباين المشترك للمعالم المقدرة ، الصيغة رقم **(11)** ، بعد إعادة كتابتها كما يلي:

$$Var-Cov\left(b_{RLS}\right)=\sigma_u^2\left(X'X\right)^{-1}-\sigma_u^2(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1}$$

الحد الاول من الصيغة أعلاه ، ما هو إلا عبارة عن مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعالم النموذج المقدرة بموجب طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية **(OLS)** ، وهي مصفوفة مربعة ومتماثلة ، عناصر القطر فيها تمثل التباينات للمعالم المقدرة والبالغ عددها **(k+1)** ، بحيث **(j=0, 1, 2, ..., k)** . أما الحد الثاني من الصيغة ، فهو عبارة عن مصفوفة مربعة ، موجبة ومحددة)**(Pd) (Positive definite)** . لذا فإن تباين كل عنصر من عناصر موجه المعالم المقدرة بموجب طريقة **(RLS)** ، سوف يكون اقل من أو مساويا إلى تباين المعالم المقدرة وفق أسلوب**(OLS)** ، بعبارة اخرى:

$$Var\left(b_{RLS}\right)\leq Var\left(b_{OLS}\right)$$

وهذا بدوره يعني ، بأن تقديرات المربعات الصغرى المقيدة أكثر دقة من تقديرات المربعات الصغرى الاعتيادية ، وبالتالي فإن الكفاءة النسبية للمعالم المقدرة بطريقة (RLS) نسبة إلى المعالم المقدرة بطريقة (OLS) ،يمكن أن تقاس وفق الصيغة التالية:

$$eff(b_{RLS}) = \frac{Var(b_{RLS})_j}{Var(b_{OLS})_j}$$

حيث ان $j=0, 1, 2, \ldots, k$ ، وفي ظل افتراض تساوي تباين العينة في اسلوبي التقدير (OLS) و (RLS) ، بالتعويض وإعادة الترتيب يمكن إعادة كتابة صيغة الكفاءة النسبية كالاتي:

$$eff(b_{RLS}) = I_{k+1} - R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R(X'X)^{-1} \quad \ldots\ldots (12)$$

حيث أن

(I_{k+1}) تمثل مصفوفة مربعة احادية أو متطابقة.

والنتيجة النهائية لصيغة الكفاءة رقم (12) أعلاه ، عبارة عن مصفوفة مربعة ، قيم عناصر القطر فيها يجب أن تكون أقل من أو مساوية إلى الواحد الصحيح وتمثل الكفاءة النسبية للمعالم المقدرة بطريقة (RLS) ،أما العناصر خارج نطاق القطر فلا تعني شيء.

6.5 جدول تحليل التباين (ANOVA)

كما هو معلوم ، مشكلة التعدد الخطي قد تحدث في ظل فرضية التجانس أو عدم التجانس أو حالة وجود الارتباط الذاتي ، عليه فإن المصادر الأساسية لبناء جدول تحليل التباين تختلف بإختلاف طبيعة توزيع خطأ النموذج الخطي المدروس. فعلى سبيل المثال، توظيف القيود المتطابقة في ظل فرضية التجانس لتقدير معالم نموذج الانحدار المرقم (5) ، ينتج عنه مجموع مربعات إنحرافات كلية كالتالي: $Y'Y = b'_{RLS}X'Y + e'e$

حيث أن

$Y'Y$ تمثل الانحرافات الكلية (TSS)

$b'_{RLS}\ X'Y$ تمثل الانحرافات الموضحة (ESS)

$e'e$ تمثل الانحرافات غير الموضحة (RSS)

علما بأن معامل التحديد للعلاقة المفروضة بتوظيف المعلومات المسبقة يعطى وفق الصيغة التالية:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{b'_{RLS}\ X'Y}{Y'Y}$$

مصادر الانحرافات الثلاثة أعلاه تكون حجر الاساس لبناء جدول تحليل التباين التالي:

جدول تحليل التباين (ANOVA)

S of V	S.S	D.f	M.SS
الانحرافات الموضحة (ESS)	$b'_{RLS}X'Y$	K	$b'_{RLS}X'Y/k$
الانحرافات غير الموضحة (RSS)	$e'e$	n-k-1	$e'e/n-k-1$
الانحرافات الكلية (TSS)	$Y'Y$	n-1	

حيث ان

$$F_0 = \frac{b'_{RLS}X'Y/k}{e'e/n-k-1}$$

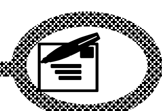
وبمقارنة قيمة (F_0) العملية مع نظيرتها الجدولية لدرجة حرية مساوية إلى (k) و (n-k-1) ولمستوى دلالة معين ، فإذا تبين ان

$$F_0 < F_t$$

فذاك يعني أن العلاقة الخطية المدروسة بتوظيف القيود المتطابقة غير معنوية ، بعبارة اخرى لا يوجد أي تأثير من أي متغير مستقل على المتغير المعتمد . أما إذا كانت

$$F_0 > F_t$$

فهذا يعني أن العلاقة الخطية التي وظف فيها المعلومات الاولية حول معالمها معنوية وهناك تأثير وعلاقة وثيقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير المعتمد.



مثال تطبيقي (1)

عينة عشوائية ذات حجم (n=16) مشاهدة ، لتمثيل متغير معتمد وعلاقته بمتغيرين مستقلين وفق النموذج الخطي التالي:

$$Y_i = \beta_o + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + U_i$$

$$U_i \sim N(0, \sigma_u^2 I_n), \quad E(U_i U_j) = 0 \quad \forall \quad i \neq j$$

علما بأن هناك معلومات مسبقة (أولية) عن معالم النموذج أعلاه ، وكالاتي:

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

وفيما يلي العلميات الحسابية اللازمة.

$$\sum Y_t = 161.3276946, \quad \sum X_{t1} = 146.3235338, \quad \sum X_{t2} = 132.7091329,$$

$$\sum X_{t1}X_{t2} = 1215.414349, \quad \sum Y_t X_{t1} = 1482.8478, \quad \sum Y_t X_{t2} = 1339.351219,$$

$$\sum Y_t^2 = 1632.575784, \quad \sum X_{t1}^2 = 1349.066396, \quad \sum X_{t2}^2 = 1101.13989,$$

المطلوب :-

1- وظف المعلومات المسبقة في تقدير معالم النموذج أعلاه.

2- اوجد كفاءة تقدير معالم النموذج بأستخدام (RLS) نسبة (OLS) .

3- ضع جدول تحليل التباين للنموذج المقدر بطريقة (RLS).

الحل:-

من العمليات الحسابية المعطاة ، يمكن وضع مصفوفة المعلومات التالية:

$$(X'X)=\begin{bmatrix} 16 & 146.3235338 & 132.7091329 \\ & 1349.066396 & 1215.414349 \\ & & 1101.13939 \end{bmatrix}$$

$$|(X'X)| = 21.4961$$

$$\therefore (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 385.0981625 & 8.093450393 & -55.34534455 \\ & 0.303138011 & -1.310018585 \\ & & 8.117090649 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 161.3276946 \\ 1482.8478 \\ 1339.351219 \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{LS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{LS} = \begin{bmatrix} 1.4992385 \\ 0.63022241 \\ 0.3402357 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_t = 1.4992385 + 0.63022241\, X_{t1} + 0.3402357\, X_{t2}$$

تباين العينة في حالة استخدام بيانات العينة فقط ، أي في حالة (OLS)

$$S_e^2 = \frac{Y'Y - b'_{LS}\, X'Y}{n-k-1}$$

باستخدام بيانات العينة

$$S_e^2 = \frac{1632.575784 - 1632.087705}{13} = 0.03754457$$

$$\therefore Var-Cov(b_{LS}) = S_e^2\,(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 14.45834492 & 0.303865114 & -2.077849581 \\ & 0.011381186 & -0.049184084 \\ & & 0.304752678 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Var(b_0) = 14.45834492 \;,\quad var(b_1) = 0.011381186 \;,\quad Var(b_2) = 0.304752678$$

في حين التقـدير بأسـتخدام طريقـة (RLS) ، أي توظيـف القيـد حـول معـالم النمـوذج الخطـي ، أي ان $(\beta_1 + \beta_2 = 1)$ وبأستخدام الصيغة العامة:

$$\mathbf{R\beta = r}$$

أي أن

$$\mathbf{r = [1], \quad R = [0 \quad 1 \quad 1], \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}$$

علما بأن

$$\mathbf{b_{Rls} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{RLS} = b_{LS} + (X'X)^{-1} R' \left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1} (r - Rb_{LS})}$$

بالتعويض في تقديرات (OLS) وبمصفوفة القيود ، إضافة إلى قيمة القيد ، نحصل على:

$$\mathbf{(X'X)^{-1} R' = \begin{bmatrix} -47.25189416 \\ -1.006947839 \\ 6.807072064 \end{bmatrix}, \quad R(X'X)^{-1} R' = 5.800124225}$$

$$\mathbf{\therefore [R(X'X)R'] = \frac{1}{5.800124225}, \quad R\,b_{LS} = 0.97045811}$$

$$\mathbf{\therefore b_{R1S} = \begin{bmatrix} 1.4992385 \\ 0.63022241 \\ 0.3402357 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -47.25189416 \\ -1.006947839 \\ 6.807072064 \end{bmatrix} \frac{(1 - 0.97045811)}{5.800124225}}$$

$$\mathbf{\therefore b_{RLS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{RLS} = \begin{bmatrix} 1.258569472 \\ 0.625093704 \\ 0.374906296 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{\therefore \hat{Y}_t = 1.258569472 + 0.625093704\,X_{t1} + 0.374906296\,X_{t2}}$$

من الصيغة التقديرية أعلاه ، يتضح بأن حاصل جمع الميل الحدي الاول مع الميل الحدي الثاني يسـاوي واحـد صـحيح ، أي أن:

$$\mathbf{b_1 + b_2 = 1}$$

أما تباين العينة في حالة توظيف القيد المتطابق المعطى في السؤال ، أي في حالة التقدير المقيد (RLS).

$$\mathbf{S_e^2 = \frac{Y'Y - b'_{RLS}\,X'Y}{n - k - 1}}$$

$$\mathbf{\therefore S_e^2 = \frac{1632.575784 - 1632.09214}{13} = 0.037203384}$$

ومنه يتضح أن:



$$S^2_{eRLS} < S^2_{eLS}$$

بتوفر التقدير أعلاه لتباين العينة ، يمكن الان احتساب مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعالم النموذج المقدرة بطريقة (RLS) ، أي أن :

$$Var - Cov(b_{RLS}) = S^2_e (X'X)^{-1} - S^2_e (X'X)^{-1} R' [R(X'X)R']^{-1} R(X'X)^{-1}$$

حيث ان

$$S^2_e (X'X)^{-1} R' = (0.037203384) \begin{bmatrix} -47.25189416 \\ -1.0069447839 \\ 6.807072064 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.757930363 \\ -0.037461867 \\ 0.253246115 \end{bmatrix}$$

أما

$$S^2_e (X'X)^{-1} R' \left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -1.757930363 \\ -0.037461867 \\ 0.253246115 \end{bmatrix} . \left(\frac{1}{5.800124225}\right)$$

ولدينا أعلاه ، $\left[(X'X)^{-1} R'\right]' = R(X'X)^{-1}$ ، اذن

$$R(X'X)^{-1} = [-47.25189416 \quad -1.0069447839 \quad 6.807072064]$$

$$\therefore S^2_e (X'X)^{-1} R' \left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1} R(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 14.32133796 & 0.305170348 & -2.063121096 \\ & 0.006503244 & -0.043965544 \\ & & 0.29721166 \end{bmatrix}$$

وبما أن $S^2_{eRLS} \neq S^2_{eLS}$ ، أذن

$$S^2_e (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 14.32695505 & 0.301103742 & -2.059034106 \\ & 0.011277759 & -0.048737124 \\ & & 0.30198324 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Var - Cov(b_{RLS}) = S^2_e (X'X)^{-1} - S^2_e (X'X)^{-1} R' \left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1} R(X'X)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.00561709 & -0.004066606 & 0.00408699 \\ & 0.004774515 & 0.131336784 \\ & & 0.00477158 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Var(b_0) = 0.00561709, \quad Var(b_1) = 0.004774515, \quad Var(b_2) = 0.00477158$$

وبالتالي كفاءة التقدير تعطى وفق الصيغة التالية:

$$eff(b_j)_{RLS} = \frac{Var(b_j)_{RLS}}{Var(b_j)_{LS}} \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, k$$

وبالنسبة لمثالنا أعلاه ،

$$eff(b_0)_{RLS} = \frac{0.00561709}{14.45834492} = 0.000388$$

$$eff(b_1)_{RLS} = \frac{0.004774515}{0.011381186} = 0.41950$$

$$eff(b_2)_{RLS} = \frac{0.00477158}{0.304752678} = 0.01566722$$

ومنه يتضح بأن التقدير بطريقة (RLS) أكثر كفاءة من التقدير بطريقة (OLS) .

تجدر الاشارة هنا ، إلى أن كفاءة التقدير المحتسبة أعلاه ، لا تعتمد على الافتراض الـذي اعتمـد عليـه في الجانـب النظري والمتمثل بتساوي تباين العينة في طريقتي التقدير ، لذا احتسبت الكفاءة النسبية لتقـدير معـالم النمـوذج المقيـدة نسبة إلى معالم نفس النموذج غير المقيـدة مبـاشرة آخـذين بنظـر الاعتبـار اخـتلاف تبـاين العينـة نتيجـة لتوظيـف القيـود المتطابقة في عملية التقدير .

أما مدى معنوية العلاقة الخطية المفترضة ، فيمكن قياسـها مـن خـلال بنـاء جـدول تحليـل التبـاين (ANOVA) ، وفيما يلي المصادر الأساسية للإنحرافات بعد توظيف القيود المتطابقة في التقدير .

1- الانحرافات الموضحة (ESS)

$$ESS = b'_{RLS}\ X'Y = 1632.09214$$

2- الانحرافات الكلية (TSS)

$$TSS = Y'Y = \sum Y_t^2 = 1632.575784$$

$$\therefore RSS = TSS - ESS = Y'Y - b'_{RLS}\ X'Y$$

$$RSS = 1632.575784 - 1632.09214 = 0.483644$$

$$\therefore S_e^2 = MSS = \frac{RSS}{n-k-1} = \frac{0.483644}{13} = 0.037203384$$

وفيما يلي جدول تحليل التباين مصنف حسب مصدر الاختلاف .

جدول تحليل التباين (ANOVA)

S of V	S.S	D.f	M.SS
الانحرافات الموضحة (ESS)	1632.09214	2	816.04607
الانحرافات غير الموضحة (RSS)	0.483644	13	0.037203384
الانحرافات الكلية (TSS)	1632.575784	15	

$$\therefore F_0 = \frac{816.04607}{0.037203384} = 2134.7266$$

وبمقارنة قيمة (F_0) أعلاه مع القيمة الجدولية بدرجة حرية مساوية إلى (2) و (13) ولمستوى دلالة 5%

$F_{(2, 13, 0.05)}=3.81$

$$\therefore F_0 > F_t$$

وهذا يعني أن العلاقة الخطية المفترضة والتي وظف فيها المعلومات الاولية معنوية ، وهناك تأثير وعلاقة وثيقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير المعتمد في النموذج المدروس.

6.6 القيود المتطابقة والنماذج الخطية المجزئة

يمكن اختبار اثر معنوية القيود المتطابقة الموضوعة على معالم نموذج الانحدار من خلال تحليل مربعات الانحرافات الناتجة عند استخدام أسلوب المربعات الصغرى المقيدة (RLS) وأسلوب المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) ، فعلى سبيل المثال يمكن تجزئة النموذج الخطي على ثلاثة مستويات وكالآتي:

المستوى الأول $Y_1 = X_1\beta_1 + \mu_1$

المستوى الثاني $Y_2 = X_2\beta_2 + \mu_2$ ....(13)

المستوى الثالث $Y_3 = X_3\beta_3 + \mu_3$

حيث ان:

Y_3, Y_2, Y_1 : موجهات لمشاهدات المتغير المعتمد من مرتبة $(1\times n_1)$و$(1\times n_2)$,$(n_3\times 1)$ على التوالي.

X_3, X_2, X_1 : مصفوفات لمشاهدات المتغيرات التوضيحية من مرتبة $((1+k_1)\times n_1)$،$(n_2\times(k_2+1))$، $(n_3\times(k_3+1))$ على التوالي.

$\beta_3, \beta_2, \beta_1$: موجهات للمعالم المطلوب تقديرها من مرتبة $(1\times(1+k_1))$،$(1\times(1+k_2))$،$((k_3+1)\times 1)$ على التوالي.

μ_3, μ_2, μ_1 : موجهات للأخطاء العشوائية من مرتبة $(1\times n_1)$,$(n_2\times 1)$,$(n_3\times 1)$ على التوالي.

$$n_1 + n_2 + n_3 = n$$

ويمكن إعادة كتابة النماذج المجزأة أعلاه في نموذج مجزأ عام وكالآتي:

$$Y = X\beta + U \qquad ....(14)$$

حيث أن:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \quad , \underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 \end{bmatrix} \quad , \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad , U = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$E(\underline{U}) = E\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E[\underline{U'U}] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 I_{n_3} \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n$$

يتلخص أسلوب اختبار معنوية ومدى تأثير القيود في لنماذج الثلاثة أعلاه، من خلال تحليل القيود الموضوعة على معالم النموذج (14) ومن ثم اختبار مدى صحة هذه القيود ، فعلى سبيل المثال لو كانت هذه القيود متمثلة بتساوي كافة معالم النموذج أعلاه ، هذا يعني اختبار فرضية العدم الآتية:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\circ: &\ \beta_{\circ 1} = \beta_{\circ 2} = \cdots = \beta_{\circ q} \\ : &\ \beta_{t1} = \beta_{t2} = \cdots = \beta_{tq} \end{aligned}$$

حيث أن: (q) : تمثل عدد القيود

t : عدد النماذج الجزئية تحت الدراسة.

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى (OLS) يمكن إيجاد مقدرات لمعالم النموذج (14) وكالآتي:

$$\mathbf{b}_{LS} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\circ 1} \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_{\circ 2} \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_{\circ 3} \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{X}_3'\mathbf{X}_3)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{X}_3'\mathbf{Y}_3 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن مجموع مربعات الانحرافات الناتجة يكون:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{e}'\mathbf{e} &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}_{LS})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}_{LS}) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned}$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أن توزيع (S) هو

$$S = Y'Y - b'X'Y \quad \sim \quad \sigma_u{}^2 \chi^2_{(n-p)}$$

ولو عدنا للمثال في النموذج (13) وبفرض عدد من القيود المستقلة على عناصر موجه المعالم $(\underline{\beta})$ ولتكن كالآتي:

$$\mathbf{H}_\circ: \mathbf{R}\beta = 0 \qquad \text{...(15)}$$

حيث أن:

R : مصفوفة من مرتبة $(\mathbf{q} \times \mathbf{p})$ من القيود.

P : $(\mathbf{k}_1 + 1) + (\mathbf{k}_2 + 1) + (\mathbf{k}_3 + 1)$.

وباستخدام القيد (15) يمكننا الحصول على مقدرات موجه المعالم بأسلوب (RLS) وكالآتي:

$$U^{*\prime}U^{*} = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) - 2\lambda' R\beta$$

حيث أن λ تمثل مضاعف لاكرانج (Langrabge Multipliers) من مرتبة $(q \times 1)$.

$$\therefore \quad \frac{\partial U^{*\prime}U^{*\prime}}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'Xb_{RLS} - 2\lambda^{*\prime}R = 0 \quad \text{.............................(16)}$$

$$\frac{\partial U^{*\prime}U^{*}}{\partial \beta} = -2Rb_{RLS} = 0 \quad \text{...(17)}$$

وبحل المعادلتين (17,16) نحصل على الآتي:

$$b_{RLS} = b_{LS} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{LS}$$

حيث أن: b_{RLS}: يمثل موجه المعالم المقدرة بطريقة (RLS) تحت فرضية $(R\beta = 0)$

أما مجموع مربعات الانحرافات الناتج من طريقة (RLS) ، فيمكن وضعه بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} S^{*} = e^{*\prime}e^{*} &= (Y - Xb_{RLS})'(Y - Xb_{RLS}) \\ &= Y'Y - b_{RLS}X'Y - Y'Xb_{RLS} + b'_{RLS}X'Xb_{RLS} \\ &= Y'Y - Y'Xb_{RLS} - b'_{RLS}\left[X'Y - X'Xb_{RLS}\right] \end{aligned}$$

وبالتعويض عن قيمة (b_{RLS}) الموجودة داخل القوس نحصل على ما يأتي:

$$S^{*} = Y'Y - Y'Xb_{RLS} + b'_{RLS}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{RLS} \quad \text{.........................(18)}$$

ويمكن إثبات أن المقدار الأخير في المعادلة (18) مساويا للصفر أي أن:

$$b'_{RLS}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{LS} = zero$$

$$\therefore \quad S^{*} = Y'Y - Y'Xb_{RLS}$$

وبالتعويض مره أخرى عن قيمة (b_{RLS}) نحصل على ما يأتي:

$$S^{*} = Y'Y - YXb_{LS} + b'_{LS}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{LS}$$

$$\therefore \quad S^{*} = S + b'_{LS}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{LS}$$

$$S^{*} - S = b'_{LS}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{LS} \quad \text{...(19)}$$

وتحت فرضية العدم المذكورة في المعادلة (15) ، ويمكن إيجاد توزيع الفرق بين مجموع البواقي $(S^* - S)$ وكالآتي:

$$\begin{aligned} Rb_{LS} &= R(X'X)^{-1}X'Y \\ &= R(X'X)^{-1}X'[X\beta + U] \\ &= R(X'X)^{-1}X'U \qquad \text{.....(20)} \end{aligned}$$

وبتعويض العلاقة (20) في العلاقة (19) نحصل على ما يأتي:

$$\begin{aligned} S^* - S &= \left[R(X'X)^{-1}X'U\right]' \left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1} \left[R(X'X)^{-1}X'U\right] \\ &= U'X(X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1} R(X'X)^{-1}X'U \\ \therefore \quad S^* - S &= U'AU \end{aligned}$$

حيث أن A هو مصفوفة صماء (Idempotent Matrix).

عليه فإن :-

$$S^* - S = b'_{LS}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{LS} \quad \sim \quad \sigma_u^{\ 2}\chi^2_{(q)}$$

وسبق أن بينا بأن توزيع (S) هو الآتي:

$$S \quad \sim \quad \sigma_u^{\ 2}\chi^2_{(n-P)}$$

$$\therefore \quad F_{(q,n-p)} = \frac{(S^* - S)/q}{S/n-p} = \frac{b'_{LS}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{LS}/q}{(Y'Y - b'_{LS}X'Y)/n-p}$$

أو بشكل آخر

$$F_{(q,n-p)} = \frac{(S^* - S)}{qS^2_{ELS}} \qquad \text{.....(21)}$$

حيث ان:

S^* : تمثل مجموع مربعات الأخطاء الحاصل عليها من الانحدار الخطي المقيد (RLS) .

S: تمثل مجموع مربعات الأخطاء الحاصل عليها من الانحدار الخطي غير المقيد (URLS) .

q : تمثل عدد القيود المستقلة والمستخدمة في الفرضية المطلوب اختبارها.

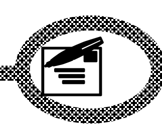
p : تمثل عدد المعالم المقدرة في كافة النماذج الجزئية بضمنها الحد الثابت.

n :تمثل حجم العينة الكلي.

وتقارن قيمة (F) العملية (21) مع القيمة المقابلة لها (القيمة الجدولية) بدرجة حرية مساوية إلى (q) و(n-p) ولمستوى دلالة معين، فإذا كانت قيمة (F) العملية اكبر من قيمة (F)

الجدولية نرفض فرضية العدم $(H_{\circ})$ التي تنص على مساواة أو تساوي المعالم ونقبل الفرضية البديلة والتي تنص على وجود اختلاف معنوي بين هذه المعالم.

وتجدر الإشارة هنا ، إلى أن صيغة الاختبار رقم **(21)** مطابقة تماما للاختبار الذي جاء به جاو**(Chow test)** .



مثال تطبيقي (2)

لو فرضنا بأن النماذج الجزئية الثلاثة السابقة الذكر ، قد اخذ كل منها متغير مستقل واحد وكالآتي:

$$Y_{i1} = \beta_{\circ 1} + \beta_1 X_{i1} + \mu_{i1} \qquad ...i = 1,2,...,n_1$$

$$Y_{i2} = \beta_{\circ 2} + \beta_2 X_{i2} + \mu_{i2} \qquad ...i = 1,2,...,n_2$$

$$Y_{i3} = \beta_{\circ 3} + \beta_3 X_{i3} + \mu_{i3} \qquad ...i = 1,2,...,n_3$$

أي أن هناك ثلاثة مستويات من العينة أي ثلاثة نماذج **m=3** ولنفرض بأن القيود الموضوعة المتمثلة بتساوي الحدود الثابتة في النماذج الثلاثة أي أن فرضية العدم يمكن أن تكتب كالآتي:

$$H_{\circ} : \beta_{\circ 1} = \beta_{\circ 2} = \beta_{\circ 3}$$

أو أن تكون القيود متمثلة بتساوي الميول الحدية في النماذج الثلاثة أي أن فرضية العدم توضع بالشكل التالي:

$$H_{\circ} : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$

أو أن تكون القيود تجمع الاثنين معا ، أي أن فرضية العدم تكون كالآتي:

$$H_{\circ} : \beta_{\circ 1} = \beta_{\circ 2} = \beta_{\circ 3} \quad , \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$

ولنفرض بأن المتغيرات المعتمدة والمستقلة في النماذج أخذت البيانات التالية ولنفرض بأن هناك ثلاثة مستويات من التغذية لحيوان معين ولفترة محددة.

المستوى الأول (1)		المستوى الثاني (2)		المستوى الثالث (3)	
Y_{i1}	X_{i1}	Y_{i2}	X_{i2}	Y_{i3}	X_{i3}
8.42	1	9.86	3	6.52	2
14.68	3	9.54	3	5.11	5
21.42	5	11.96	4	7.75	7
25.45	6	12.86	5	6.84	8
27.14	7	11.38	6	7.65	10
30.53	8	14.69	8	9.49	15
34.51	9	16.48	9	7.03	16
34.52	9	20.11	12	9.41	18
33.24	0			12.01	20
39.63	11				
43.98	12				
47.77	14				

ومن المثال أعلاه يتضح

$$n_1 = 12$$
$$n_2 = 8$$
$$\underline{n_3 = 9}$$
$$n = 29$$

$$\sum X_{i1} = 95 \qquad \sum X^2{}_{i1} = 907 \qquad \sum Y_{i1} = 361.29$$

$$\sum X_{i2} = 50 \qquad \sum X^2{}_{i2} = 384 \qquad \sum Y_{i2} = 106.48$$

$$\sum X_{i3} = 101 \qquad \sum X^2{}_{i3} = 1447 \qquad \sum Y_{i3} = 71.81$$

$$\sum X_{i1} Y_{i1} = 3332.62$$

$$\sum X_{i2} Y_{i2} = 743.78$$

$$\sum X_{i3} Y_{i3} = 888.47$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n_j} Y^2{}_{ij} = Y'Y = 14449.884 \qquad j = 1,2,3$$

عليه النموذج الخطي العام المجزئ يمكن أن يوضع بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{n_1 1} \\ Y_{12} \\ Y_{22} \\ \vdots \\ Y_{n_2 2} \\ Y_{13} \\ Y_{23} \\ \vdots \\ Y_{n_3 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1_{n_1} & X_{n_1 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X_{12} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1_{n_2} & X_{n_2 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{n_3} & X_{n_3 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{\circ 1} \\ \beta_1 \\ \beta_{\circ 2} \\ \beta_2 \\ \beta_{\circ 3} \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_{n_1 1} \\ \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{n_2 2} \\ \mu_{13} \\ \mu_{23} \\ \vdots \\ \mu_{n_3 3} \end{bmatrix}$$

$\underset{(n\times1)}{\underline{Y}} = \underset{(n\times6)}{X}\underset{(6\times1)}{\underline{\beta}} + \underset{(n\times1)}{\underline{U}}$ **i.e** عدد المعالم المقدرة $P=6$, حجم العينة الكلي $n=29$

$$\therefore \quad (X'X) = \begin{bmatrix} n_1 & \sum X_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum X_{i1} & \sum X^2_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 & \sum X_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum X_{i2} & \sum X^2_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_3 & \sum X_{i3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum X_{i3} & \sum X^2_{i3} \end{bmatrix}$$

وباستخدام بيانات العينة والحسابات المعطاة ، نحصل على :

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 12 & 95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 95 & 907 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 384 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 101 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 101 & 1447 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 95 \\ 95 & 907 \end{pmatrix}^{-1} & & 0 \\ & \begin{pmatrix} 8 & 50 \\ 50 & 384 \end{pmatrix}^{-1} & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 9 & 101 \\ 101 & 1447 \end{pmatrix}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.487897 & -0.051103 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.051103 & 0.006455 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.671329 & -0.087413 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.087413 & 0.013986 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.51276 & -0.0358 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0358 & 0.00319 \end{bmatrix}$$

في حين موجه المقدرات(b_{LS}) فيكون كالاتي:-

$$\underline{X'Y} = \begin{bmatrix} \sum Y_{1i} \\ \sum X_{1i}Y_{1i} \\ \sum Y_{2i} \\ \sum X_{2i}Y_{2i} \\ \sum Y_{3i} \\ \sum X_{3i}Y_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 361.29 \\ 3332.62 \\ 106.48 \\ 743.78 \\ 71.81 \\ 888.47 \end{bmatrix} \qquad \therefore\ \underline{b}_{LS} = \begin{bmatrix} b_{\circ 1} \\ b_1 \\ b_{\circ 2} \\ b_2 \\ b_{\circ 3} \\ b_3 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} 5.96618 \\ 3.04943 \\ 6.46734 \\ 1.09483 \\ 5.02253 \\ 0.26344 \end{bmatrix}$$

لاختيار الفرضية الأولى الخاصة بتساوي الحدود الثانية في النماذج الثلاثة أي أن:

$$H_\circ : \beta_{\circ 1} = \beta_{\circ 2} \qquad , \quad \beta_{\circ 1} = \beta_{\circ 3}$$

بشكـــل عـــام

$$H_\circ : R\beta = 0$$

$$F_{(q,n-p)} = \frac{b'_{LS} R' \left[R(X'X)^{-1} R' \right]^{-1} R b_{LS} / q}{(Y'Y - b'_{LS} X'Y)/(n-p)}$$

$$n = 29 \quad , \quad p = 6 \quad q = 2$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ R b_{LS} = \begin{bmatrix} -0.50116 \\ 0.94365 \end{bmatrix}$$

كذلك نحسب المقدار $\left[R(X'X)^{-1} R' \right]^{-1}$

مصفوفة (R) معرفة لدينا وكذلك سبق وان حسبنا مصفوفة $(X'X)^{-1}$

$$\therefore \left[R(X'X)^{-1}R'\right]=\begin{bmatrix}1.159299 & 0.48797\\ 0.48797 & 1.000727\end{bmatrix}$$

$$\therefore \left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}=\begin{bmatrix}1.0853553 & -0.529236\\ -0.529236 & 1.2573372\end{bmatrix}$$

إذن بتبسيط الصيغة نحصل على الآتي:

$$b'_{RLS}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{LS}$$
$$=\begin{bmatrix}-0.50116 & 0.94365\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.0853553 & -0.529236\\ -0.529236 & 1.2573372\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.50116\\ 0.94365\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ b'_{LS}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}Rb_{LS}=1.892799$$

في حين مقام صيغة اختبار (F) ما هو إلا عبارة عن $\hat{\sigma}^2$ أو S_e^2 وبحسب الآتي:

$$S_E{}^2=(Y'Y-b'_{LS}X'Y)/(n-p)$$
$$=(14449.884-14415.793)/(29-6)$$
$$\therefore S_E{}^2=34.091/23=1.4822173$$
$$\therefore F_{(2,23)}=\frac{1.892799}{(2)(1.4822173)}=\frac{1.892799}{2.9694346}=0.63850$$

وبما أن (F) الجدولية لمستوى دلالة 5% مساوية إلى: $F_{(0.05,2,23)}=3.42$

$\therefore$ F الجدولية > F العملية

$0.64 < 3.42$

نقبل فرضية العدم $(H_\circ)$ التي تنص على مساواة الحدود الثابتة في النماذج الثلاثة ونرفض الفرضية البديلة التي تنص على وجود اختلافات بين الحدود الثابتة.

التمارين

1 فرضا موجه (β) في النموذج التالي

$$Y = X\beta + U$$

(X) مصفوفة ثابتة ذات رتبة ((n x (k+1)

يخضع للقيد الخطي التام (Exact linear Restriction) ، $r = R\beta$

حيث ان

(r) موجه ذو رتبة (Jx 1) ، (R) مصفوفة ذات رتبة (J x k+1) وأن ((J <(k+1)

أثبت في ظل افتراض تساوي تباين العينة ان كفاءة المربعات الصغرى المقيدة (RLS) نسبة إلى المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) مساوية إلى :

$$I - R'\left(R\left(X'X\right)^{-1} R'\right)^{-1} R\left(X'X\right)^{-1}$$

2 فرضا موجه (β) في النموذج التالي

$$Y = X\beta + U$$

$$E\left(U\right) = 0,\ E\left(U'U\right) = \sigma^2\,\Omega$$

(X) مصفوفة ثابتة ذات رتبة (n x k+1)

يخضع للقيد الخطي التام التالي: $r = R\beta$

حيث ان

r : تمثل موجه ذو رتبة (J x 1)

R: تمثل مصفوفة ذات رتبة (J x k+1) وأن J < k+1

في ظل أفتراض تساوي تباين العينة ، أوجد كفاءة (RLS) نسبة إلى (GLS) .

3 لنموذج الانفاق الاستهلاكي التالي:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 W_t + \beta_2 Y_t + U_t$$

$$U_t \sim N(0, \sigma_u^2 \; I_n) \; , \; E(U_t \, U_{t'}) = 0 \qquad \forall \;\; t \neq t'$$

حيث ان

C_t تمثل الانفاق الاستهلاكي.

W_t تمثل الاجور والرواتب.

Y_t تمثل دخلا خاصا متمثلا بالايجار والأرباح

فإذا علمت بأن الميل الحدي للاستهلاك بالنسبة إلى الدخل الخاص يساوي ثلثي الميل الحدي للأستهلاك بالنسبة لدخل المستهلك من الاجور والرواتب ، أي أن $\beta_2 = (2/3)\beta_1$.

وظف القيد المتطابق أعلاه في تقدير معالم نموذج الانفاق الاستهلاكي.

4 باحث احصائي جزء كل من مصفوفة (X) وموجه (β) في النموذج أدناه:

$$Y = X\beta + U$$

$$E(U)=0 \; , \; E(UU')=\sigma^2_u \, I_n$$

وعلى النحو الاتي:

$$X = [\gamma \quad \pi] \; , \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_o \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

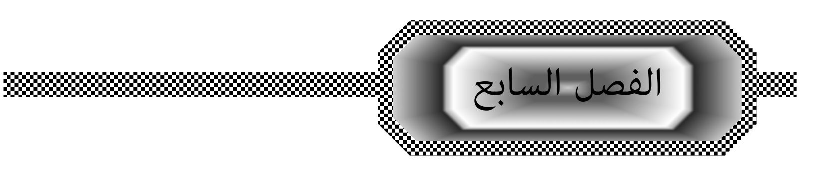
حيث ان (γ) موجه احادي ذو ($n\times1$) و (π) مصفوفة ذات ($n\times k$) ، (β_o) هو حد ثابت للنموذج المجزأ ، (β) موجه ذو ($k+1$). أثبت ان مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجه (β_k) مساوية إلى :

$$Var - Cov(\beta_k) = \sigma_u^2 \left[\pi' \left(I_n - \frac{\gamma\gamma'}{n} \right) \gamma \right]^{-1}$$

5 اعتمادا على بيانات المثال الثاني اختبر الفرضية الاتية

$Ho: \beta_1=\beta_2=\beta_3$

$H_1: \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$



7

منظومـــة المعــادلات الآنيـــــة
The Simultaneous Equations System (SEM)

7.1 المقدمــة

أن نموذج الانحدار الخطي الذي تم التطرق إليه في الفصول السابقة ونوقشت مشاكله في الفصل الثالـث والرابـع من هذا الكتاب ، ما هو إلا عبارة عن حالة خاصة من وضع عام ، حيث افترض بموجبه أن هنـاك اتجاهـا وحيـدا للسـببية ، بمعنى أن مجموعة المتغيرات المستقلة $(X_1, X_2, ..., X_k)$ تؤثر في المتغير المعتمد (Y_i) ولا تتأثر به ، في حين الحالـة العامـة لمعظم العلاقات الاقتصادية ، تنطوي على الاعتماد المتبادل بين المتغيرات الداخلة في النموذج ، أي أن هناك على الأقل عـدد من المتغيرات تتحدد آنيا ، تؤثر وتتأثر ببعضها البعض.

فعلى سبيل المثال الاستهلاك يؤثر في الدخل ويتـأثر بـه في الوقـت ذاتـه . ومـن ثـم فـلا مجـال للقـول بـأن دالـة الاستهلاك تقف بمعزل عن غيرها من العلاقات التي تحدد الدخل والاستثمار . كذلك الأجور لا تتحدد بمعزل عن الأسعار ولا تتحدد الأسعار بمعزل عن الأجور، وإنما يتحدد الاثنان سوية ضمن منظومة متعددة المعادلات.

في ضوء ما ذكر أعلاه ، يمكن القول بأن نموذج الانحدار السابق الذكر يفتقـر إلى الواقعيـة نظـرا لافتراضـه اتجاهـا وحيدا للسببية بين مجموعة المتغيرات المستقلة والمتغير المعتمـد، عليـه فالمعالجـة الصـحيحة لمعظـم الظـواهر الاقتصـادية تقتضي صياغتها في صورة مجموعة متداخلة من العلاقات بهيئة منظومة معادلات آنية.

7.2 فروض منظومة المعادلات الآنية

بشكل عام يمكن تعريف منظومة المعادلات الآنية ، بأنهـا منظومـة مـن المعـادلات التـي يكـون المتغـير المعتمـد لواحد أو أكثر من معادلاتها متغيرا مستقلا في معادلة أو أكثر من معادلة ضـمن المنظومـة. وتـدعى المتغـيرات المعتمـدة في منظومة المعادلات الآنية بالمتغيرات الداخلية (**Endogenous Variables**) ، حيث يقابل كل متغير داخلي في المنظومة معادلـة واحدة، وبهذا

فأن عدد المعادلات في منظومة المعادلات الآنية ينبغي أن يساوي عدد المتغيرات الداخلية ، أما فيما يتعلق بالمتغيرات الخارجية (Exogenous Variables) فأن عددها لا يتحدد بعدد المتغيرات الداخلية ، وأنما يتوقف ذلك على طبيعة العلاقة بين مختلف معادلات المنظومة ، فقد يحدث أن تكون بعض المتغيرات المستقلة (الخارجية) في المنظومة متغيرات داخلية والتي بدورها تعتمد على قيم الحدود العشوائية في المنظومة ، وهو أمر يتناقض مع الافتراض الخاص بنموذج الانحدار العام والذي ينص على استقلالية العلاقة ما بين قيم المتغيرات المستقلة وقيم الحدود العشوائية . ويمكن توضيح ذلك من خلال النموذج الكينزي البسيط التالي:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 X_t + U_t \\ X_t &= Y_t + Z_t \end{aligned} \quad \text{.......(1)}$$

حيث أن

Y_t تمثل الاستهلاك ، X_t تمثل الدخل ، Z_t تمثل الاستثمار

المعادلة الأولى من المنظومة أعلاه تعرف بدالة الاستهلاك ، حيث ظهر فيها متغيرا عشوائيا (U_t) كعنصر خطأ. أما المعادلة الثانية فتعرف بأنها متطابقة أو علاقة تعريفية ، وهي محددة ولا يوجد فيها عنصر خطأ.

إذا كان هناك استقلال بين المتغير المستقل (X_t) والمغير العشوائي (U_t) ، عندها يمكن تطبيق طريقة (OLS) للحصول على تقديرات غير متحيزة لمعالم دالة الاستهلاك ، ولكن مثل هذا الشرط غير متحقق في المنظومة أعلاه ، وذلك لأن المتغير (X_t) لا يمكن اعتباره متغيرا خارجيا في دالة الاستهلاك لارتباطه بعنصر الخطأ العشوائي (U_t) في هذه الدالة ، ويتضح ذلك بشكل جلي عند التعويض عن قيمة (Y_t) بما يساويها في المعادلة الثانية من المنظومة أعلاه.

$$X_t = (\beta_0 + \beta_1 X_t + U_t) + Z_t$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على:

$$X_t - \beta_1 X_t = \beta_0 + Z_t + U_t$$

$$\therefore X_t (1 - \beta_1) = \beta_0 + Z_t + U_t$$

$$\therefore X_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{Z_t}{1-\beta_1} + \frac{U_t}{1-\beta_1} \quad \text{.......(2)}$$

يتبين من الصيغة رقم (2) أعلاه أن الدخل (X_t) دالة في عنصر الخطأ العشوائي (U_t) في دالة الاستهلاك ، بعبارة أخرى

$$Cov(X_t\ U_t) \neq 0$$

وذلك لأن

$$Cov(X_t\ U_t) = E[(X_t - E(X_t))(U_t - E(U_t))]$$

وبالتعويض عن القيمة المتوقعة لـ (X_t) ، وعلى افتراض $E\ (U_t)=0$.

$$\therefore Cov(X_t\ U_t) = E\left[\left(X_t - \left(\frac{\beta_0}{1-\beta_1}\right) - \left(\frac{1}{1-\beta_1}\right)Z_t\right)U_t\right]$$

وبالتعويض عن (X_t) بما يساويها من (2) :

$$Cov(X_t U_t) = E\left[\left(\frac{1}{1-\beta_1}\right)U_t . U_t\right] = \left(\frac{1}{1-\beta_1}\right)E\left(U_t^2\right) = \left(\frac{1}{1-\beta_1}\right)\sigma_u^2$$

النتيجة أعلاه غير صفرية ، ويستدل منها بعدم إمكانية تطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معالم دالة الاستهلاك، أي أن تقدير معالم دالة الاستهلاك باستخدام (OLS) سوف يكون متحيزا وغير متسقا ، لذا يستوجب اللجوء إلى طرق أخرى لتقدير معالم منظومة المعادلات الآنية.

الفرض أعلاه يوضح حالة بسيطة للتشابك بين متغير خارجي واحد والخطأ العشوائي في منظومة متضمنة علاقتين فقط ، بشكل عام وفي حالة توفر (k) من المتغيرات الخارجية في منظومة متضمنة (G) من المعادلات ، عندها يمكن استخدام اسلوب المصفوفات لبيان الفروض الواجب توفرها عند بناء منظومة المعادلات الآنية للظواهر المختلفة ، ولتوضيح ذلك دعنا ندرس منظومة المعادلات التالية والمعاد ترتيب حدودها بالشكل التالي:

$$\begin{array}{l}
\beta_{11}\ y_{1t} + \beta_{12}\ y_{2t} + \dots + \beta_{1G}\ y_{Gt} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + \dots + \gamma_{1k}x_{kt} = U_{1t} \\
\beta_{21}\ y_{1t} + \beta_{22}\ y_{2t} + \dots + \beta_{2G}\ y_{Gt} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{2t} + \dots + \gamma_{2k}x_{kt} = U_{2t} \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\beta_{G1}\ y_{1t} + \beta_{Gt}\ y_{2t} + \dots + \beta_{GG}\ y_{Gt} + \gamma_{G1}x_{1t} + \gamma_{G2}x_{2t} + \dots + \gamma_{Gk}x_{kt} = U_{Gt}
\end{array} \qquad \dots\dots\dots\dots (3)$$

حيث أن

y^{s} تمثل المتغيرات الداخلية ، x^{s} تمثل المتغيرات الخارجية

U^{s} تمثل الاخطاء العشوائية

$\gamma^{s}\ , \beta^{s}$ تمثل معالم المنظومة الخاصة بالمتغيرات الداخلية والخارجية على التوالي.

G تمثل عدد المتغيرات الداخلية ، k تمثل عدد المتغيرات الخارجية

مجموعة المعادلات رقم (3) أعلاه ، تمثل منظومة معادلات آنية . وفيها المتغير المعتمد لواحد أو أكثر من معادلاتها متغيراً مستقلاً في معادلة أخرى أو أكثر من معادلة ضمن تلك المجموعة من المعادلات ، بعبارة أخرى أن بعض المتغيرات المعتمدة تكون كمتغيرات تفسيرية مرتبطة بمتغيرات معتمدة أخرى ، علما بأن منظومة المعادلات الآنية تكون على أنواع ، منها منظومة المعادلات الترددية (Recursive Equations System) والتي يمكن إيجاد (تحديد) المتغيرات الداخلية فيها بالتعاقب . وهناك نوع آخر من المنظومات الآنية تعرف بمنظومة المعادلات القطاعية-الترددية (Block - Recursive Equations System) والتي فيها مجموعة المعادلات يمكن تجزئتها إلى مجموعات أو قطاعات من المعادلات بحيث تكون المعادلات محددة آنيا في كل قطاع وأن مجموع المعادلات عبر القطاعات تأخذ صفة منظومة معادلات ترددية بحيث أن المعلومات عن المتغيرات الداخلية في القطاع الأول على سبيل المثال تساعد على تحديد المتغيرات الداخلية في القطاع الثاني وهكذا...

فضلا عن ذلك فان ، هناك حالة خاصة من منظومة المعادلات الآنية وفيها لا يظهر أي تداخل (تشابك) بين متغيراتها الداخلية والخارجية ولكن لا يزال هناك تداخل بين معادلاتها السلوكية وذلك نتيجة لترابط الأخطاء العشوائية بين المعادلات المختلفة ، هذا النوع يعرف بمنظومة معادلات انحدار غير مرتبطة ظاهريا (Seemingly Unrelated Regression Equations) ، (SURE) وفيها مجموعة المعادلات قد تكون مرتبطة إحصائيا حتى ولو أنها لا تبدو كذلك هيكليا.

مرة أخرى بالرجوع إلى منظومة المعادلات الآنية رقم (3) ، حيث يمكن إعادة كتابته باستخدام المصفوفات والموجهات وكآلاتي:

$$\beta Y_t + \Gamma X_t = U_t \quad \text{.........(4)}$$

الصيغة رقم (4) أعلاه تعرف بالشكل الهيكلي أو النموذج الهيكلي (Structural model) وكل معادلة هيكلية فيه تعبر عن أحد المتغيرات الداخلية بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية وكذلك المتغيرات الداخلية المرتدة زمنيا أن وجدت ، علما بأن كل من U_t , X_t , Y_t تمثل موجهات في حين β و Γ تمثل مصفوفات وبالشكل التالي:

$$Y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{Gt} \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{kt} \end{bmatrix}, \quad U_t = \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \\ \vdots \\ U_{Gt} \end{bmatrix},$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1G} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GG} \end{bmatrix} , \ \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots & \gamma_{Gk} \end{bmatrix}$$

وأن موجه خطأ المنظومة (U_t) يخضع للفرض التالي:

$$U_t \sim N(0, \Phi)$$

وبمصفوفة تباين وتباين مشترك للأخطاء العشوائية كالآتي:

$$Var - Cov(U_t) = E(U_t \, U'_t) = \Phi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \cdots & \sigma_{GG} \end{bmatrix}$$

قطر المصفوفة أعلاه ، يمثل التباين للأخطاء العشوائية في مختلف معادلات المنظومة ، أما العناصر خارج نطاق قطر المصفوفة فتمثل التباين المشترك بين أخطاء كل معادلتين من معادلات المنظومة الآنية.

7.3 التشخيص والإختزال

تعد مشكلة التشخيص (Identification) من المشاكل الاساسية لبناء النماذج القياسية، ونقصد بالتشخيص أختبار كل معادلة من معادلات المنظومة من حيث صياغتها بشكل نهائي وبدون أهمال أي متغير أساسي أو ثانوي فيها، وبالتالي بيان الأسلوب الملائم لتقدير معالم المنظومة تحت البحث ، ولغرض توضيح الفكرة الأساسية للتشخيص دعنا أن ندرس منظومة العرض والطلب التالية:

$$\begin{aligned} D &= A_0 + A_1 P + U_1 \\ S &= \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + U_2 \\ S &= D \end{aligned}$$

حيث أن

(D) تمثل الكمية المطلوبة ، (S) تمثل الكمية المعروضة ، (P) تمثل السعر ،

(W) تمثل الرقم القياسي لحالة الجو ،

وأن (P , S , D) تعرف بالمتغيرات الداخلية و (W) يمثل متغير خارجي.

كل معادلة هيكلية في منظومة المعادلات أعلاه تعبر عـن أحـد المتغـيرات الداخليـة بدلالـة المتغـيرات الخارجيـة والداخلية وكذلك المتغيرات الداخلية المرتدة زمنيا (**Lagged endogenous variables**) ومعالم النموذج الهيكلي تسمى بالمعالم الهيكلية (**Structural Parameters**) . وبالرجوع إلى النموذج الهيكلي أعلاه ، حيث يمكن اشتقاق نموذجا آخر ، وذلك بالتعبير عن كل متغير داخلي فيه بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة [1] زمنيا ان وجدت ، بما أن **S=D**

$$\mathbf{A_0 + A_1P + U_1 = \beta_0 + \beta_1P + \beta_2W + U_2}$$

$$\therefore \mathbf{P\left(A_1 - \beta_1\right) = \beta_0 - A_0 + \beta_2\, W + U_2 - U_1}$$

ومنه

$$\mathbf{P = \frac{\beta_0 - A_0}{A_1 - \beta_1} + \frac{\beta_2}{A_1 - \beta_1}W + \frac{U_2 - U_1}{A_1 - \beta_1}} \quad \text{.......(5)}$$

,بتعويض ذلك في دالة العرض أو الطلب نحصل على:

$$\mathbf{D = A_0 + A_1\left(\frac{\beta_0 - A_0}{A_1 - \beta_1} + \frac{\beta_2}{A_1 - \beta_1}W + \frac{U_2 - U_1}{A_1 - \beta_1}\right) + U_1}$$

$$\therefore \mathbf{D = S = \frac{A_1\,\beta_0 - A_0\,\beta_1}{A_1 - \beta_1} + \frac{A_1\beta_2}{A_1 - \beta_1}W + \frac{A_1\,U_2 - U_1\,\beta_1}{A_1 - \beta_1}} \quad \text{.......(6)}$$

الصيغتين أعلاه رقم (5) و (6) والمشتقة من النموذج الهيكلي تسمى بالنموذج المختـزل (**Reduce Form Model**) ، وظهرت فيه المتغيرات الداخلية كدالة في المتغيرات الخارجية ، فضلا عن عنصر الخطأ وبمقارنة معالم النموذج الهيكلي بمعالم النموذج المختزل ، يتضح أن معالم النموذج المختزل ما هي إلا دوال لمعالم النموذج الهيكلي ، وكذلك الحال بالنسـبة لعنصر الخطأ العشوائي ، علما بأن معالم النموذج الهيكلي تقيس الأثر المباشر للمتغير المستقل (داخليا كان أو خارجيا) عـلى المتغـير الداخلي ، في حين معالم النموذج المختـزل تقـيس الأثـر الكـلي ، أي الأثـر المبـاشر والأثـر غـير المبـاشر للمتغـير في المتغـيرات المستقلة (خارجية كانت أو داخلية مرتدة زمنيا) على كل متغير داخلي.

[1] **في مثالنا هذا ، يمكن أن يكون المتغير (P) متغيرا داخليا مرتدا زمنيا بسنة واحدة (P_{t-1}) أو بسنتين (P_{t-2}) وهكذا...**

يتضح من الصيغتين أعلاه أن معالم النموذج المختزل تأخذ بنظر الأعتبار التشابك (الترابط) المتبادل بين المتغيرات الداخلية ، فعلى سبيل المثال زيادة وحدة واحدة في المتغير (W) يؤدي في النموذج المختزل إلى زيادة في السعر قدرها $\left(\beta_2 / (A_1 - \beta_1)\right)$ وزيادة في العرض أو الطلب مقدارها $\left(\beta_2 A_1 / (A_1 - \beta_1)\right)$ ومثل هذه الخاصية لها فائدة كبيرة في التنبوء وتحليل السياسات ، و ذلك لان ما يهم واضع السياسة هو الأثر الكلي وليس فقط الأثر المباشر لتغير المتغيرات الخارجية على المتغيرات الداخلية.

وبإعادة كتابة النموذج المختزل

$$\begin{aligned} P &= \Pi_{11} + \Pi_{12} W + V_1 \\ D = S &= \Pi_{21} + \Pi_{22} W + V_2 \end{aligned} \qquad \text{.......... (7)}$$

حيث أن

$$\Pi_{11} = \frac{\beta_0 - A_0}{A_1 - \beta_1}, \qquad \Pi_{12} = \frac{\beta_2}{A_1 - \beta_1} \ , \quad V_1 = \frac{U_2 - U_1}{A_1 - \beta_1}$$

$$\Pi_{21} = \frac{A_1 \beta_0 - A_0 \beta_1}{A_1 - \beta_1}, \quad \Pi_{22} = \frac{\beta_2 A_1}{A_1 - \beta_1} \ , \quad V_2 = \frac{A_1 U_2 - U_1 \beta_1}{A_1 - \beta_1}$$

حيث يمكن استخدام طريقة (OLS) بشكل غير مباشر لتقدير معالم منظومة العرض والطلب أعلاه ، وذلك في حالة تحقق الشروط اللازمة لتشخيص كل معادلة من معادلاته. ويقصد بشرط التشخيص هو أمكانية الحصول على تقدير وحيد لمعالم النموذج الهيكلي من تقديرات معالم النموذج المختزل ، وعندها يكون النموذج تحت البحث مشخصا تماما (Just Identify) . أما إذا لم يكن النموذج الهيكلي مشخصا (Under Identify) فأن ذلك يعني عدم امكانية الحصول على تقديرات وحيدة للمعالم الهيكلية من تقديرات معالم النموذج المختزل ، وفي الحالة التي يكون فيها هناك أمكانية للحصول على عدة قيم من النموذج المختزل لكل معلمة من معالم النموذج الهيكلي، عندها سوف لن يكون هناك تقديرا وحيدا لهذه المعالم وبالتالي يكون النموذج المدروس فوق التشخيص (Over Identify) ، وسنفرد القسم التالي من هذا الفصل لتوضيح هذه الاستنتاجات .

الآن وفي حالة مثالنا السابق ، نلاحظ من نموذج الاختزال رقم (7) ، يمكن الوصول إلى تقديرات وحيدة لمعالم دالة الطلب (A_1 , A_0) في النموذج الهيكلي وكالاتي:-

$$A_1 = \frac{\Pi_{22}}{\Pi_{12}} \ , \quad A_0 = \Pi_{21} - \frac{\Pi_{22}}{\Pi_{12}} \Pi_{11}$$

وهذا بدوره يعني أن دالة الطلب مشخصة ، أما معالم دالة العرض $\beta_0 , \beta_1 , \beta_2$ فلا يمكن تقديرها من خلال معالم النموذج المختزل ، وعليه فهي دالة غير مشخصة وبالتالي منظومة العرض والطلب ككل غير مشخصة ويجب النظر بإعادة بناءها.

وبالرجوع إلى النظرية الاقتصادية وبالذات إلى مفهوم دالة الطلب ، نجد أن الطلب ما هو إلا دالة في السعر والدخل وليس فقط في السعر كما ورد في المعادلة الأولى من المنظومة ، عليه يستوجب إعادة صياغة منظومة العرض والطلب بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} D &= A_0 + A_1 P + A_2 Y + U_1 \\ S &= \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + U_2 \\ D &= S \end{aligned} \qquad \text{.........(8)}$$

حيث أن

(Y) تمثل الدخل ، وبقية المتغيرات تأخذ نفس التعريف السابق. النموذج الهيكلي أعلاه متكون من ثلاثة معادلات بثلاثة متغيرات داخلية P , S , D . ويحتوي على متغيرين خارجيين هما الدخل (Y) وحالة الجو (W) ، ولغرض تشخيص كل معادلة من معادلاته لا بد من إيجاد الصيغة المختزلة له ، أي التعبير عن كل متغير داخلي بدلالة المتغيرات الخارجية وذلك يتم بالإحلال المتتابع وكالآتي:-

$$A_0 + A_1 P + A_2 Y + U_1 = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + U_2$$

$$\therefore P(\beta_1 - A_1) = A_0 - \beta_0 + A_2 Y - \beta_2 W + U_1 - U_2$$

$$\therefore P = \frac{A_0 - \beta_0}{\beta_1 - A_1} + \frac{A_2}{\beta_1 - A_1} Y - \frac{\beta_2}{\beta_1 - A_1} W + \frac{U_1 - U_2}{\beta_1 - A_1} \qquad \text{.........(9)}$$

وبالتعويض في معادلة العرض أو الطلب نحصل على:

$$D = A_0 + A_1 P + A_2 Y + U_1$$

$$\therefore D = A_0 + A_1 \left(\frac{A_0 - \beta_0}{\beta_1 - A_1} + \frac{A_2}{\beta_1 - A_1} Y - \frac{\beta_2}{\beta_1 - A_1} W + \frac{U_1 - U_2}{\beta_1 - A_1} \right) + A_2 Y + U_1$$

$$\therefore D = \frac{A_0 \beta_1 - A_1 \beta_0}{\beta_1 - A_1} + \frac{A_2 \beta_1}{\beta_1 - A_1} Y - \frac{A_1 \beta_2}{\beta_1 - A_1} W + \frac{U_1 \beta_1 - U_2 A_1}{\beta_1 - A_1} = S \qquad \text{.........(10)}$$

الصيغة (9) و (10) يمثلان الشكل المختزل للنموذج الهيكلي والذي يمكن إعادة كتابته بالشكل التالي:-

$$\mathbf{D = S = \Pi_{10} + \Pi_{11} Y + \Pi_{12} W + V_1}$$

....(11)

$$\mathbf{P = \Pi_{20} + \Pi_{21} Y + \Pi_{22} W + V_2}$$

حيث أن :

$$\Pi_{10} = \frac{A_0\beta_1 - A_1\beta_0}{\beta_1 - A_1}, \quad \Pi_{11} = \frac{A_2\beta_1}{\beta_1 - A_1}, \quad \Pi_{12} = \frac{-A_1\beta_2}{\beta_1 - A_1},$$
$$V_1 = \frac{U_1\beta_1 - U_2 A_1}{\beta_1 - A_1}, \quad \Pi_{20} = \frac{A_0 - \beta_0}{\beta_1 - A_1}, \quad \Pi_{21} = \frac{A_2}{\beta_1 - A_1}$$
$$\Pi_{22} = \frac{-\beta_2}{\beta_1 - A_1}, \quad V_2 = \frac{U_1 - U_2}{\beta_1 - A_1}$$

وبملاحظة النموذج المختزل أعلاه رقم (11) ، نجد هناك أمكانية لتقدير معالم دالة الطلب في النموذج الهيكلي وعلى النحو التالي:

$$A_0 = \Pi_{20}\left(\frac{\Pi_{10}}{\Pi_{20}} - \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}\right), \quad A_1 = \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}$$

$$A_2 = \left(\frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}} - \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}\right)\Pi_{21} = \Pi_{11} - \frac{\Pi_{12}\,\Pi_{21}}{\Pi_{22}}$$

وكذلك الحال بالنسبة لمعالم دالة العرض في النموذج الهيكلي ، حيث يمكن تقديرها من معالم النموذج المختزل وكالآتي:

$$\beta_0 = \Pi_{20}\left(\frac{\Pi_{10}}{\Pi_{20}} - \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}}\right), \quad \beta_1 = \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}}$$

$$\beta_2 = \Pi_{22}\left(\frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}} - \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{21}}\right) = \Pi_{12} - \frac{\Pi_{22}\,\Pi_{11}}{\Pi_{21}}$$

وبما ان هنالك ستة علاقات مستنبطه من النموذج المختزل تمثل ستة معالم في النموذج الهيكلي، أي أن هناك تقديرات وحيدة لمعالم المنظومة الهيكلي وبالتالي فأن كل من دالة الطلب والعرض مشخصة والمنظومة ككل مشخصة تماما ، حيث يمكن تطبيق (OLS) بشكل غير مباشر لتقدير معالم النموذج الهيكلي وذلك عن طريق تقدير معالم النموذج المختزل أولا ثم أستخدام العلاقات الستة أعلاه لتقدير المعالم الهيكلية A_0 , A_1 , A_2 , و β_0 , β_1 , β_2 وهذا الاسلوب في التقدير يعرف بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) ، (Indirect Least Square) .

7.4 الشروط الأساسية للتشخيص

لقد تطرقنا في الجزء (3-10) من هذا الفصل إلى مناقشة مشكلة التشخيص، وقد اتضح بأن تشخيص أي معادلة هيكلية يتطلب إيجاد الاختزال لها أولا ، في الواقع ليس ضروري أن نختزل المعادلة الهيكلية في كل مرة لغرض تشخيصها ، فهناك قاعدة عامة يمكن استخدامها لهذا الغرض دون اللجوء إلى الاختزال وتتمثل هذه القاعدة بتحقق الشرطين التاليين:

1- شرط الترتيب **Order Condition**

2- شرط الرتبة **Rank Condition**

الشرط الأول ضروري ولكنه غير كاف لتشخيص أي معادلة هيكلية من معادلات المنظومة، لذا وتأكيد للاختبار الأول يستوجب اجتياز المعادلة شرط الاختبار الثاني.

بشكل عام تكون المعادلة مشخصة بموجب الشرط الأول ، عندما يكون عدد المتغيرات المستبعدة منها ولكنها داخله في المعادلات الأخرى للنموذج الهيكلي مساويا لعدد معادلات المنظومة مطروحا منه واحد. فإذا كان عدد معادلات المنظومة الهيكلية (G)، وعدد المتغيرات سواء كانت خارجية أو داخلية أو داخلية مرتدة زمنيا في النموذج الهيكلي مساوية إلى (K) ، وعدد المتغيرات في المعادلة محل الاختبار مساوية إلى (M) . فإن شرط الترتيب لتشخيص هذه المعادلة يأخذ الصيغة التالية:

$$K - M \geq G - 1$$

فإذا كانت $K - M = G-1$ تكون المعادلة مشخصة تماما **(Exactly or Just Identified)** .

أما إذا كانت $K - M > G-1$ تكون المعادلة فوق التشخيص **(Over Identified)** .

وأخيرا في حالة $K - M < G-1$ عندها تكون المعادلة غير مشخصة أو تحت التشخيص **(Under Identified)** .

ولغرض تأكيد المرحلة الأولى من الاختبار ، لا بد من اجراء الاختبار الثاني والمتمثل بشرط الرتبة الذي يلخص بالشكل التالي، ترتب كافة المعالم الهيكلية بدلالة جميع المتغيرات في المنظومة ، ثم تؤخذ المعالم المقابلة للمعالم المفقودة في المعادلة المطلوب أختبارها وتوضع بشكل مصفوفة ، بعدها نجد قيمة محدد هذه المصفوفة والتي تكون ذات رتبه (G-1) ، فإذا كانت قيمة محددها لا يساوي صفر تكون المعادلة مشخصة ، وبخلافه أي إذا كانت قيمة المحدد مساويا للصفر، عندها توصف المعادلة موضع البحث بأنها غير مشخصة (تحت التشخيص). أما

إذا حدث وأن كانت المصفوفة المستخرجة من المعالم الهيكلية غير مربعة ، عندها يستوجب تجزئتها إلى كافة المصفوفات الجزئية الممكنة وذات الرتبة (G-1) ، فإذا كانت على الأقل واحدة من قيم هذه المحددات لا يساوي صفر تكون المعادلة مشخصة ، أما إذا كانت كافة قيم المحددات ذات الرتبة (G-1) مساوية إلى الصفر ، فإن المعادلة سوف تكون غير مشخصة.

وبالرجوع إلى مثالنا السابق والذي تم اختزاله ، والمتعلق بمنظومة العرض والطلب والمتكون من معادلتين ومتطابقة ، فلغرض تشخيص كل معادلة من معادلاته ، يستوجب إعادة كتابته بالشكل التالي:

$$-D + A_0 + A_1 P + A_2 Y + U_1 = 0$$

$$-S + \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 W + U_2 = 0$$

$$-D + S = 0$$

ثم نرتب كافة المعالم للمنظومة أعلاه ، بدلالة كافة المتغيرات سواء كانت متغيرات داخلية أو خارجية أو داخلية مرتدة زمنيا وكالآتي:

المعادلة	المتغيـــــرات					
	1	D	S	P	Y	W
(1)	A_0	-1	0	A_1	A_2	0
(2)	$\bullet_0$	0	-1	$\bullet_1$	0	$\bullet_2$
(3)	0	-1	1	0	0	0

شروط الترتيب **Order Condition**

$$K - M \geq G - 1$$

K = 5 , G = 3

بالنسبة للمعادلة الأولى

5 – 3 = 3 – 1 ، المعادلة مشخصة تماما

بالنسبة للمعادلة الثانية

5 – 3 = 3 – 1 ، المعادلة مشخصة تماما

شرط الرتبة **Rank Condition**

بالنسبة للمعادلة الأولى

$$\begin{bmatrix} -1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \therefore \begin{vmatrix} -1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\beta_2$$

فإذا كانت قيمة (β_2) لا تساوي صفر ، فأن المعادلة الاولى تكون مشخصة تماما.

بالنسبة للمعادلة الثانية

$$\begin{bmatrix} -1 & A_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \therefore \begin{vmatrix} -1 & A_2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = A_2$$

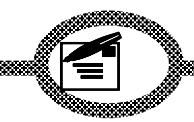
فإذا كانت قيمة (A_2) لا تساوي صفر ، فأن المعادلة الثانية تكون مشخصة تماما.

تجدر الإشارة هنا إلى أن المنظومة الهيكلية تكون غير مشخصة ، إذا كانت واحدة أو أكثر من معادلاتها غير مشخصة ، وهذا النوع من النماذج الهيكلية لا يمكن تقدير معالمه بأي أسلوب من أساليب القياس الاقتصادي ، أما إذا كانت كافة معادلات المنظومة مشخصة تماما عندها تكون المنظومة ككل مشخصة تماما وبالتالي يمكن تقدير معالمها الهيكلية بموجب طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة **(ILS) (Indirect Least Square)** أو طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين **(2SLS) (Two Stage Least Square)** أو طريقة المتغيرات المساعدة **(IV) (Instrumental Variable)** أو طريقة الامكان الاعظم ذات المعلومات المحدودة **(LIML) (Limited Information Maximum Likelihood)** وأخيرا إذا كانت معادلات المنظومة فوق التشخيص ، فإن معالمها الهيكلية يمكن أن تقدر بأحدى الأساليب القياسية التالية:

a- طريقة المربعات الصغرى ذات الثلاث مراحل **(3 SLS) (Three Stage Least Square).**

b- طريقة الإمكان الأعظم ذات المعلومات الكاملة (التامة) **(FIML) (Full Information Maximum Likelihood).**

تجدر الإشارة هنا إلى أن الطريقتين الأخيرتين تسمى بطرق المنظومة ، لكون التقدير بموجبها يتم آنيا وعلى مستوى كافة معادلات المنظومة ، في حين الطرق الأربعة الأولى تعرف بطرق أحادية المعادلة ، وذلك لأمكانية تطبيقها لتقدير معالم كل معادلة من معادلات المنظومة على انفراد.



مثال تطبيقي (1)

شخص كل معادلة من معادلات المنظومة التالية:

$$Y_1 = 3\,Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1$$

$$Y_2 = Y_3 + X_3 + U_2$$

$$Y_3 = Y_1 - Y_2 - 2\,X_3 + U_3$$

علما بأن Y_1 , Y_2 , Y_3 متغيرات داخلية ، X_1 , X_2 , X_3 متغيرات خارجية.

الحل:

نعيد كتابة النموذج الهيكلي بعد دمج المتغيرات الداخلية مع المتغيرات الخارجية وكالآتي:

$$-Y_1 + 3\,Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1 = 0$$

$$-Y_2 + Y_3 + X_3 + U_2 = 0$$

$$-Y_3 + Y_1 - Y_2 - 2\,X_3 + U_3 = 0$$

وبإهمال الأخطاء العشوائية وإعادة كتابة المعالم الهيكلية بدلالة كافة المتغيرات في المنظومة نحصل على:

المعادلة	المتغيـــــرات					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
(1)	-1	3	0	-2	1	0
(2)	0	-1	1	0	0	1
(3)	1	-1	-1	0	0	-2

أولا : اختبار شرط الترتيب

صيغة الاختبار

$$K - M \geq G - 1$$

حيث أن $K = 6 , G = 3$

بالنسبة للمعادلة الأولى

$2 = 2$ ، المعادلة مشخصة تماما

بالنسبة للمعادلة الثانية

$3 > 2$ ، المعادلة فوق التشخيص

بالنسبة للمعادلة الثالثة

$2 = 2$ ، المعادلة مشخصة تماما

<u>**ثانيا : اختبار شرط الرتبة**</u>

بالنسبة للمعادلة الأولى

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

وبما أن محدد هذه المصفوفة مساويا إلى (1-) ، إذن المعادلة مشخصة بشكل نهائي.

بالنسبة للمعادلة الثانية

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبما أن المصفوفة غير مربعة ، لذا يجب تجزئتها على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

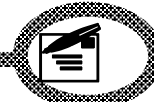
وبإيجاد قيم محدد المصفوفات المجزئة أعلاه نحصل على:

قيمة محدد المصفوفة الأولى مساويا إلى (2) ، وقيمة محدد المصفوفة الثانية مساويا إلى (1-)، أما محدد المصفوفة الثالثة يساوي صفر. وبما أن هناك على الأقل واحد من قيم المحددات للمصفوفة المجزئة لا يساوي صفر ، إذن المعادلة الثانية مشخصة بشكل نهائي .

بالنسبة للمعادلة الثالثة

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبما أن قيمة محدد المصفوفة يساوي صفر ، أذن المعادلة غير مشخصة.



مثال تطبيقي (2)

شخص كل معادلة من معادلات المنظومة التالية:

$$C_t = A_0 + A_1 Y_t + A_2 C_{t-1} + U_{1t}$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 I_{t-1} + U_{2t}$$
$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 M_t + U_{3t}$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث أن

R_t , I_t , Y_t , C_t تمثل الاستهلاك ، الدخل القابل للتصرف ، الاستثمار ، سعر الفائدة على التوالي ، وتمثل متغيرات داخلية ، أما M و G تمثل السعر الجاري والنفقات الحكومية على التوالي ، وهي متغيرات خارجية.

I_{t-1} , C_{t-1} تمثل متغيرات داخلية مرتدة بسنة واحدة.

<u>الحل:</u>

نعيد كتابة النموذج الهيكلي أعلاه ، بعد دمج المتغيرات الداخلية مع الخارجية وكذلك مع المتغيرات الداخلية المرتدة زمنيا.

$$-C_t + A_0 + A_1 Y_t + A_2 C_{t-1} + U_{1t} = 0$$
$$-I_t + \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 I_{t-1} + U_{2t} = 0$$
$$-R_t + \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 M_t + U_{3t} = 0$$
$$-Y_t + C_t + I_t + G_t = 0$$

وبإهمال الأخطاء العشوائية وإعادة كتابة المعالم بدلالة كافة المتغيرات نحصل على :

المعادلة	المتغيـــــرات								
	C_t	I_t	R_t	Y_t	1	C_{t-1}	I_{t-1}	M_t	G_t
(1)	-1	0	0	A_1	A_0	A_2	0	0	0
(2)	0	-1	β_1	0	β_0	0	β_2	0	0
(3)	0	0	-1	γ_1	γ_0	0	0	γ_2	0
(4)	1	1	0	-1	0	0	0	0	1

أولا : اختبار شرط الترتيب

صيغة الاختبار

$$\mathbf{K - M \geq G - 1}$$

حيث أن $\mathbf{K = 8 , G = 4}$

بالنسبة للمعادلة الأولى

$\mathbf{5 > 3}$ ، المعادلة فوق التشخيص

بالنسبة للمعادلة الثانية

$\mathbf{5 > 3}$ ، المعادلة فوق التشخيص

بالنسبة للمعادلة الثالثة

$\mathbf{5 > 3}$ ، المعادلة فوق التشخيص

ثانيا : اختبار شرط الرتبة

بالنسبة للمعادلة الأولى

$$\begin{bmatrix} -1 & \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة أعلاه غير مربعة ، لذا يستوجب تجزئتها إلى مصفوفات مربعة ذات رتبة **(G-1)** وكالآتي:

$$\begin{bmatrix} -1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & -1 & \gamma_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ وهكذا لكافة المصفوفات الممكنة ...

ثم إيجاد قيم محدداتها ، فإن وجد على الأقل واحد من قيم محدداتها الجزئية لا يساوي صفر ، كانت المعادلة مشخصة وبعكسه تكون غير مشخصة.

بالنسبة للمعادلة الثانية

$$\begin{bmatrix} -1 & A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبنفس الاسلوب السابق ، يجب تجزئة المصفوفة أعلاه ، ثم إيجاد قيمة محدداتها الجزئية.

وبالنسبة للمعادلة الثالثة ، نجد المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وكذلك الحال هنا ، بما أن المصفوفة غير مربعة ، عليه يجب تجزئتها إلى كافة المصفوفات ذات الرتبة (G-1) ثم إيجاد قيمة محدداتها الجزئية.

7.5 الصيغة العامة للتشخيص والاختزال

حالة التشخيص والاختزال أعلاه ، كانت على مستوى منظومة متضمنة عدد قليل من المعادلات ، بشكل عام في حالة وجود (k) من المتغيرات الخارجية و (G) من المعادلات ، عندها يستوجب استخدام المصفوفات والموجهات ، لتوضيح ذلك دعنا نرجع إلى منظومة المعادلات المرقمة (3) وبحلها للمتغيرات الداخلية يمكن الحصول على الصيغة المختزلة ، بعبارة أخرى لغرض الوصول إلى الصيغة المختزلة لكل متغير داخلي في المنظومة لا بد من وضع (y^s) بدلالة الـ (x^s) والمتغيرات المرتدة زمنيا أن وجدت وكذلك الأخطاء العشوائية المصاحبة لعملية الأختزال وكما يلي:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \Pi_{11}x_{1t} + \Pi_{21}x_{2t} + \dots + \Pi_{1k}x_{kt} + V_{1t} \\ y_{2t} &= \Pi_{21}x_{1t} + \Pi_{22}x_{2t} + \dots + \Pi_{2k}x_{kt} + V_{2t} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_{Gt} &= \Pi_{G1}x_{1t} + \Pi_{2G}x_{2t} + \dots + \Pi_{Gk}x_{kt} + V_{Gt} \end{aligned}$$

حيث أن

Π^s تمثل معالم الصيغ المختزلة.

V^s تمثل الحدود المختلفة للأخطاء العشوائية في الصيغ المختزلة.

مرة أخرى وبأستخدام المصفوفات والموجهات ، يمكن أن نضع الشكل المختزل لمجموعة المعادلات أعلاه كالاتي

$$Y_t = \Pi x_t + V_t \quad \text{.......} (12)$$

حيث أن

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \cdots & \Pi_{1k} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \cdots & \Pi_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Pi_{G1} & \Pi_{G2} & \cdots & \Pi_{Gk} \end{bmatrix} \quad , \quad V_t = \begin{bmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \\ \vdots \\ V_{Gt} \end{bmatrix}$$

بضرب النموذج الهيكلي رقم (4) ضربا مقدما بمعكوس مصفوفة معالم المتغيرات الداخلية نحصل على الصيغة المختزلة وكالاتي:

$$Y_t + \beta^{-1}\Gamma X_t = \beta^{-1}U_t$$

$$\therefore Y_t = -\beta^{-1}\Gamma X_t + \beta^{-1}U_t \quad \text{.........} (13)$$

بمقارنة صيغة الاختزال رقم (13) مع الصيغة رقم (12) ، نلاحظ أن

$$\Pi = -\beta^{-1}\Gamma \;\; , \;\; V_t = \beta^{-1}U_t$$

حيث أن $V_t = \beta^{-1}U_t$ يمثل متجه اخطاء الشكل المختزل.

وأن $\Pi = -\beta^{-1}\Gamma$ تمثل مصفوفة معالم الشكل المختزل ، حيث يمكن الحصول عليها بعد تقدير معالم الشكل الهيكلي بالطريقة التي تتناسب مع حالة التشخيص . وعليه فإن استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) في تقدير معالم المنظومة يؤدي بشكل عام إلى الحصول على تقديرات غير متسقة ، لذا استوجب التعبير عن المتغيرات التوضيحية في الشكل المختزل بدلالة المتغيرات المحددة مسبقا وهذا بدوره يؤدي إلى الحصول على تقديرات متسقة. علما بأن عملية الحصول على معالم الشكل الهيكلي بدلالة معاملات الشكل المختزل تتوقف على نوعية اختبار التشخيص ، ولتوضيح مراحل إجراء هذا الاختبار دعنا أن نرجع إلى الشكل الهيكلي المرقم (4) والمعاد كتابه في أدناه:

$$\beta Y_t + \Gamma X_t = U_t$$

وبأخذ المعادلة "g" من بين معادلات هذه المنظومة فإن

$$Y_{gt} = \beta_g Y_t + \gamma_g X_t + U_{gt} \quad \text{.........} (14)$$

حيث أن β_g , γ_g تمثلان موجهي معالم المتغيرات الداخلية والخارجية الموجودة في المعادلة (g)، وأن Y_t تمثل المتغيرات الداخلية التوضيحية.

ولو فرضنا أن:

G: تمثل عدد المتغيرات الداخلية الموجودة في المنظومة ككل.

G^{Δ} : تمثل عد المتغيرات الداخلية الموجودة في المعادلة "g".

$G^{\Delta\Delta} = G - G^{\Delta}$: تمثل المتغيرات الداخلية التي لم ترد في المعادلة ولكنها موجودة في المنظومة.

K^{**} : تمثل عدد المتغيرات المحددة مسبقا والتي تظهر في المعادلة "g".

K : تمثل عدد المتغيرات المحددة مسبقا والموجودة في المنظومة ككل.

$K^{**}=K-K^{*}$: تمثل المتغيرات المحددة مسبقا والتي لم ترد في المعادلة ولكنها موجودة في المنظومة .

كما يمكن تجزئة مصفوفة معادلات المتغيرات الداخلية للشكل الهيكلي كما يأتي:

$$\beta_g = [\beta_{\Delta} \quad O_{\Delta\Delta}]$$

$$\gamma_g = [\gamma_{*} \quad O_{**}]$$

حيث أن:

$$\begin{array}{llllll} \beta_{\Delta} & = & [\beta_{g1} \quad \beta_{g2} \quad \cdots \quad \beta_{g\,G^{\Delta}}] & \to & 1 \times G^{\Delta} \\ O_{\Delta\Delta} & = & [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] & \to & 1 \times G^{\Delta\Delta} \\ \gamma_{*} & = & [\gamma_{g1} \quad \gamma_{g2} \quad \cdots \quad \gamma_{g_K}{}^{*}] & \to & 1 \times K^{*} \\ O_{**} & = & [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] & \to & 1 \times K^{**} \end{array}$$

وبنفس الوقت يمكن تجزئة مصفوفة معاملات الشكل المختزل (Π) بالشكل الاتي:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{\Delta*} & \Pi_{\Delta**} \\ \Pi_{\Delta\Delta*} & \Pi_{\Delta\Delta**} \end{bmatrix}$$

حيث أن

$\Pi_{\Delta*}$ مصفوفة ذات $G^{\Delta} \times K^{*}$

$\Pi_{\Delta**}$ مصفوفة ذات $G^{\Delta} \times K^{**}$

$\Pi_{\Delta\Delta*}$ مصفوفة ذات $G^{\Delta\Delta} \times K^{*}$

$\Pi_{\Delta\Delta**}$ مصفوفة ذات $G^{\Delta\Delta} \times K^{**}$

وبما أن:

$$\Pi = -\beta^{-1}\Gamma$$

فأن:

$$\beta \Pi = -\Gamma$$

ولتوضيح ذلك دعنا نعود إلى المعادلة "g" ، حيث نأخذ صفا واحدا من مصفوفة (β) وبضربه في مصفوفة (Π) فأن الناتج يمثل صفا واحدا من مصفوفة (Γ) وكما يأتي:

$$\beta_g \Pi = -\gamma_g$$

وبالتعويض عن (β_g) و (γ_g) بما يساويها ينتج:

$$[\beta_\Delta \quad O_{\Delta\Delta}]\begin{bmatrix} \Pi_{\Delta *} & \Pi_{\Delta **} \\ \Pi_{\Delta\Delta *} & \Pi_{\Delta\Delta **} \end{bmatrix} = -[\gamma_* \quad O_{**}]$$

وبالتعديل يمكن الحصول على:

$$\beta_\Delta \ \Pi_{\Delta *} = -\gamma_* \quad \text{.......... (15)}$$

$$\beta_\Delta \ \Pi_{\Delta **} = O_{**} \quad \text{.......... (16)}$$

وبما أن عدد كل المعادلات في العلاقة (16) هو (K**) ، حيث أن كل معادلة تعود لعنصر واحد من الموجه (1 x K**) . فإذا أردنا الحصول على قيم β_Δ فإننا تحتاج على الأقل إلى $(G^\Delta - 1)$ من المعادلات وهذا يتطلب أن يكون $K^{**} \geq G^\Delta - 1$ وهذا ما يطلق عليه بشرط الترتيب لاختبار التشخيص إن توفر هذا الشرط يعد ضروريا لأختبار التشخيص ولكنه ليس كافيا. إذ يجب أن يكون عدد المعادلات في العلاقة (16) مساوي إلى $(G^\Delta - 1)$ ، عندها يمكن الحصول على قيم (β_g) وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت رتبة أكبر مصفوفة جزئية ناتجا عن $(\Pi_{\Delta **})$ تساوي $(G^\Delta - 1)$ أي ان : $\mathrm{rank}\ (\Pi_{\Delta **}) = G^\Delta - 1$ وهذا ما يطلق عليه بشرط الرتبة لاختبار التشخيص ، حيث أن:

$$\mathrm{rank}\ (\Pi_{\Delta **}) = \mathrm{rank}\ [\beta_{\Delta\Delta} \ \ \Gamma_{**}] - G^{\Delta\Delta} = G^\Delta - 1 \quad \text{.......... (17)}$$

حيث أن $(\beta_{\Delta\Delta})$ تمثل مصفوفة المعاملات الهيكلية للمتغيرات الداخلية والتي لا تتضمنها العلاقة "g" ولكنها موجودة في المنظومة.

(Γ_{**}) تمثل مصفوفة المعاملات الهيكلية للمتغيرات المحددة مسبقا والتي لا تتضمنها العلاقة "g" ولكنها موجودة في المنظومة . وبتوفر هذين الشرطين يمكننا تحديد إمكانية الحصول على الشكل المختزل بدلالة معاملات الشكل الهيكلي أو النموذج الهيكلي.

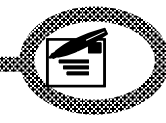
بعد إجراء اختباري الترتيب والرتبة يمكن معرفة حالة التشخيص وفقا للحالات الآتية:

1 - إذا كان $rank\left(\Pi_{\Delta^{**}}\right)=G^{\Delta}-1$ و $K^{**}>G^{\Delta}-1$ فإن المعادلة في حالة (Over ident) أو ما يعرف بـ (فوق التشخيص).

2 - إذا كان $rank\left(\Pi_{\Delta^{**}}\right)=G^{\Delta}-1$ و $K^{**}=G^{\Delta}-1$ فإن المعادلة في حالة (Just or exact ident) أي مشخصة تماما.

3 - إذا كان $rank\left(\Pi_{\Delta^{**}}\right)<G^{\Delta}-1$ و $K^{**}\geq G^{\Delta}-1$ فإن المعادلة في حالة (Under ident) أي أن المعادلة تحت التشخيص (غير مشخصة).

4 - إذا كان $K^{**}<G^{\Delta}-1$ فإن المعادلة في حالة (under ident) ، (غير مشخصة) ففي حالة كون المعادلة غير مشخصة ، عندها لا يمكن تقدير معالمها ويجب إعادة النظر في المنظومة من حيث صحة وصف المتغيرات المكونة لها وعدد تلك المتغيرات وأهميتها بالنسبة للعلاقة المدروسة ، أما إذا كانت المعادلة من نوع (exact ident) فبالامكان الحصول على تقدير وحيد لمعالم المعادلة في المنظومة وإن أنسب طريقة لتقدير هذه المعالم هي طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) أو طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (2SLS) ، أما إذا كانت العلاقة من نوع (over ident) فإن هذا يعني وجود أكثر من تقدير وحيد لمعالم العلاقة ، حيث يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المراحل الثلاث (3SLS) أو طريقة الامكان الأعظم ذات المعلومات التامة (FIML)، علما بأن المتطابقات والمعادلات التعريفية والتوازنية لا يجري لها اختبار التشخيص وذلك لعدم وجود معالم فيها.



مثال تطبيقي (3)

لمنظومة المعادلات التالية:

الكمية المطلوبة $$Q_t^D=\alpha_1+\alpha_2 P_t+\alpha_3 Y_t+U_1t$$

الكمية المعروضة $$Q_t^s=\beta_1+\beta_2 P_t+U_2t$$

$$Q_t^D=Q_t^S=Q_t$$

جد الصيغة المختزلة لكل من المتغيرات الداخلية Q_t و P_t ، علما بأن المتغير (Y_t) هو المتغير الخارجي الوحيد في المنظومة ، ثم شخص كل معادلة من معادلات المنظومة.

الحل:

الخطوة الأولى في عملية التشخيص ، هو دمج المتغيرات الداخلية مع المتغيرات الخارجية فضلا عن المتغيرات المرتدة زمنيا أن وجدت.

$$Q_t - \alpha_1 - \alpha_2 P_t - \alpha_3 Y_t = U_1 t$$

$$Q_t - \beta_1 - \beta_2 P_t = U_2 t$$

باستخدام الموجهات والمصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_t \\ P_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_3 \\ -\beta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\beta \quad Y_t \quad + \quad \Gamma \quad X_t \quad = \quad U_t$$

حيث أن

β تمثل مصفوفة لمعالم المتغيرات الداخلية.

Γ تمثل مصفوفة لمعالم المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيا إن وجدت ، فضلا عن معالم الحدود الثابتة لمختلف معادلات المنظومة.

Y_t موجه يمثل عناصر المتغيرات الداخلية.

X_t موجه يمثل عناصر المتغيرات الخارجية والمرتدة زمنيا ، علما بأن العنصر الأول منه يمثل الحد الثابت.

وكما بينا سابقا ، يمكن الحصول على الصيغة المختزلة لكل متغير داخلي في المنظومة من خلال ضرب الشكل الهيكلي ضربا مقدما بمعكوس مصفوفة معالم المتغيرات الداخلية (β) وكالآتي:

$$Y_t = -\beta^{-1} \Gamma X_t + \beta^{-1} U_t$$

أي أن

$$Y_t = \Pi X_t + V_t$$

بشكل أكثر تفصيلا

$$\begin{bmatrix} Q_t \\ P_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \end{bmatrix}$$

حيث أن

$$\Pi = -\beta^{-1}\Gamma = -\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\beta_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_3 \\ -\beta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{\alpha_2 - \beta_2}\begin{bmatrix} -\beta_2 & \alpha_2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_3 \\ -\beta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \Pi = \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2}\begin{bmatrix} (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) & -\alpha_3\beta_2 \\ \alpha_1 - \beta_1 & -\alpha_3 \end{bmatrix}$$

وأن

$$V_t = \begin{bmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \end{bmatrix} = \beta^{-1} U_t = \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2}\begin{bmatrix} -\beta_2 & \alpha_2 \\ -1 & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha_2 - \beta_2}\right)\begin{bmatrix} -\beta_2 U_{1t} + \alpha_2 U_{2t} \\ -U_{1t} + U_{2t} \end{bmatrix}$$

عليه فإن الصيغة المختزلة للمتغيرات الداخلية

$$\begin{bmatrix} Q_t \\ P_t \end{bmatrix} = \frac{-1}{\alpha_2 - \beta_2}\begin{bmatrix} (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) & -\alpha_3\beta_2 \\ (\alpha_1 - \beta_1) & -\alpha_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ Y_t \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2}\begin{bmatrix} -\beta_2 U_{1t} + \alpha_2 U_{2t} \\ -U_{1t} + U_{2t} \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الصيغة المختزلة لدالة العرض والطلب (Q_t) تعطى كالاتي:

$$Q_t = \frac{-\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{\alpha_2 - \beta_2} + \frac{\alpha_3\beta_2}{\alpha_2 - \beta_2} Y_t - \frac{\beta_2 U_{1t} + \alpha_2 U_{2t}}{\alpha_2 - \beta_2}$$

في حين الصيغة المختزلة لمتغير السعر (P_t)

$$P_t = \frac{-\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2 - \beta_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2 - \beta_2} Y_t - \frac{U_{1t} + U_{2t}}{\alpha_2 - \beta_2}$$

أما حالة تشخيص كل معادلة من معادلات المنظومة ، يتطلب تحقيق شرطي الترتيب والرتبة وكالاتي:

صيغة شرط الترتيب (Order condition) العامة $k^{**} \geq G^{\Delta} - 1$ بالنسبة للمعادلة الأولى (دالة الطلب).

$G^{\Delta} = 2$ تمثل عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة المطلوب تشخيصها.

$k^{**} = 0$ تمثل عدد المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيا غير الموجودة في المعادلة المطلوب تشخيصها ولكنها موجودة ضمن المنظومة.

$$\therefore k^{**} < G^{\Delta} - 1$$

أي أن 0<1

وهذا يعني أن المعادلة الأولى غير مشخصة وبالتالي لا توجد ضرورة لاجراء اختبار الرتبة لهذه المعادلة.

أما بالنسبة للمعادلة الثانية (دالة العرض)

$$k^{**} = 1 \quad , \quad G^{\Delta} = 2$$

$$\therefore k^{**} = G^{\Delta} - 1$$

أي أن 1=1

أي أن دالة العرض مشخصة تماما ، عليه يستوجب الانتقال إلى اختبار الرتبة والذي بدوره يتطلب وضع كافة معالم المنظومة بدلالة كافة المتغيرات سواء كانت داخلية أو خارجية أو مرتدة زمنيا وكالاتي.

Y_t	P_t	Q_t	1	المعادلة
$-\alpha_3$	$-\alpha_2$	1	$-\alpha_1$	1
0	$-\beta_2$	1	$-\beta_1$	2

بالرجوع إلى صيغة اختبار الرتبة المرقمة (17) والمعاد كتابتها في أدناه

$$\text{Rank}\left(\Pi_{\Delta**}\right) = \text{Rank}\left[\beta_{\Delta\Delta}\ \Gamma_{**}\right] - G^{\Delta\Delta}$$

حيث أن

$$\text{Rank}\left[\beta_{\Delta\Delta}\ \Gamma_{**}\right] = \text{Rank}\begin{bmatrix} \text{مصفوفة تمثل عناصرها المعالم المقابلة للمعلمة المفقودة في المعادلة المطلوب تشخيصها} \end{bmatrix} = \text{Rank}\left(-\alpha_3\right) = 1$$

$G^{\Delta\Delta} = 0$ تمثل عدد المتغيرات الداخلية المستبعدة من المعادلة المطلوب تشخيصها.

$$\therefore Rank\left(\Pi_{\Delta **}\right) = 1 - 0 = 1$$

أو بصيغة أخرى $Rank\left(\Pi_{\Delta **}\right) = G^{\Delta} - 1$

وبما أن $G^{\Delta} = 2$ $\therefore Rank\left(\Pi_{\Delta **}\right) = 1$

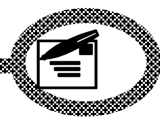
وبالتالي فإن حالة التشخيص لدالة العرض أخذ الوضع التالي:

$$\boxed{Rank\left(\Pi_{\Delta **}\right) = G^{\Delta} - 1 \;\;,\;\; k** = G^{\Delta} - 1}$$

أي أن

$$\boxed{Rank\left(\Pi_{\Delta **}\right) = 1 \;,\;\; 1 = 1}$$

النتيجة أعلاه تعني بأن دالة العرض قد اجتازت شرطي الترتيب والرتبة وهـي بالتـالي مشخصـة تماما ، أي أن هنـاك تقـدير وحيد لمعالم معادلة العرض.



مثال تطبيقي (4)

أختزل ثم شخص كل معادلة من معادلات المنظومة التالية:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 C_{t-1} + U_{1t}$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 I_{t-1} + U_{2t}$$

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 M_t + U_{3t}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث أن

$R_t \;, Y_t \,, I_t \;, C_t$ تمثل الاستهلاك ، الاستثمار ، الدخل وسعر الفائدة على التوالي وهي متغيرات داخلية.

$G_t \;, M_t$ تمثل السيولة النقدية والنفقات الحكومية وهي متغيرات خارجية.

$I_{t-1} \;, C_{t-1}$ تمثل متغيرات داخلية مرتدة زمنيا.

الحل:

ايجاد الصيغة المختزلة لكل متغير داخلي من متغيرات المنظومة ، يتطلب إعادة كتابة هيكل المنظومة بالشكل التالي.

$$C_t - \alpha_0 - \alpha_1 Y_t - \alpha_2 C_{t-1} = U_{1t}$$

$$I_t - \beta_0 - \beta_1 R_t - \beta_2 I_{t-1} = U_{2t}$$

$$R_t - \gamma_0 - \gamma_1 Y_t - \gamma_2 M_t = U_{3t}$$

$$Y_t - C_t - I_t - G_t = 0$$

وباستخدام الموجهات والمصفوفات ، يمكن إعادة ترتيب كل من المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيا كالاتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \\ R_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 0 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_0 & 0 & 0 & -\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ C_{t-1} \\ I_{t-1} \\ M_t \\ G_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \\ U_{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta \qquad Y_t \quad + \qquad \Gamma \qquad X_t \quad = \quad U_t$$

عليه فإن الصيغة المختزلة تكون كالاتي:

$$Y_t = -\beta^{-1}\Gamma X_t + \beta^{-1}U_t$$

$$\therefore \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \\ R_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta} \begin{bmatrix} \alpha_0(1-\beta_1\gamma_1)+\alpha_1(\beta_0+\beta_1\gamma_0) & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_1\gamma_2 & \alpha_1 \\ \alpha_0\beta_1\gamma_1+(1-\alpha_1)(\beta_0+\beta_1\gamma_0) & \alpha_2\beta_1\gamma_1 & (1-\alpha_1)\beta_2 & (1-\alpha_1)\beta_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_1 \\ \alpha_0+\beta_0+\beta_1\gamma_0 & \alpha_2 & \beta_2 & \beta_1\gamma_2 & 1 \\ (\alpha_0+\beta_0)\gamma_1+(1-\alpha_1)\gamma_0 & \alpha_2\gamma_1 & \beta_2\gamma_1 & (1-\alpha_1)\gamma_2 & \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ C_{t-1} \\ I_{t-1} \\ M_t \\ G_t \end{bmatrix} + \frac{1}{\theta} \begin{bmatrix} 1-\beta_1\gamma_1 & \alpha_1 & \alpha_1\beta_1 \\ \beta_1\gamma_1 & (1-\alpha_1) & (1-\alpha_1)\beta_1 \\ 1 & 1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & (1-\alpha_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \\ U_{3t} \end{bmatrix}$$

حيث أن

$\theta = 1 - \alpha_1 - \beta_1\gamma_1$ يمثل محدد مصفوفة (β) ، علما بأن الحد الثاني من الصيغة أعلاه، قد تغيرت قيمة رتبة المصفوفة حيث أصبحت (4 x 3) وذلك لان العنصر الاخير من موجه الاخطاء (U_t) يساوي صفر.

من الشكل المختزل أعلاه ، يمكن تحديد كافة الصيغ المختزلة ، فعلى سبيل المثال الصيغة المختزلة لمعادلة الاستهلاك (C_t) تكتب كالاتي:

$$C_t = \frac{\alpha_0(1-\beta_1\gamma_1)+\alpha_1(\beta_0+\beta_1\gamma_0)}{\theta} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\theta}C_{t-1} + \frac{\alpha_1\beta_2}{\theta}I_{t-1} +$$

$$\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_2}{\theta}M_t + \frac{\alpha_1}{\theta}G_t + \frac{(1-\beta_1\gamma_1)U_{1t}+\alpha_1U_{2t}+\alpha_1\beta_1}{\theta}U_{3t}$$

وهكذا لكافة متغيرات المنظومة الداخلية...

أما حالة تشخيص معادلات المنظومة ، فيستوجب وضع كافة معالم الشكل الهيكلي بدلالة متغيرات المنظومة الداخلية والخارجية والمرتدة زمنيا وكما في الجدول التالي:

المعادلة	1	C_t	I_t	R_t	Y_t	C_{t-1}	I_{t-1}	M_t	G_t
1	$-\alpha_0$	1	0	0	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	0	0	0
2	$-\beta_0$	0	1	$-\beta_1$	0	0	$-\beta_2$	0	0
3	$-\gamma_0$	0	0	1	$-\gamma_1$	0	0	$-\gamma_2$	0
4	0	-1	-1	0	1	0	0	0	-1

بالنسبة للمعادلة الاولى:- دالة الاستهلاك-

1- شرط الترتيب:-

$$k^{**} \geq G^{\Delta}-1 \;,\quad G^{\Delta}=2 \;,\quad k^{**}=3$$

$$\therefore k^{**} > G^{\Delta}-1 \;,\quad 3>1$$

2- شرط الرتبة:-

$$\text{rank}(\Pi_{\Delta^{**}}) = \text{rank}[\beta_{\Delta\Delta} \quad \Gamma_{**}] - G^{\Delta\Delta}$$

علما بأن

$$\text{rank}(\beta_{\Delta\Delta} \quad \Gamma_{**}) = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma_2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3 \;,\; G^{\Delta\Delta}=2$$

$$\therefore \text{rank}(\Pi_{\Delta^{**}}) = 3-2=1$$

أو

$$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1 = 2 - 1 = 1$$

وبما أن حالة التشخيص لدالة الاستهلاك ، أخذ الوضع التالي:

$$\boxed{rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1 \quad , \ k^{**} > G^{\Delta} - 1}$$

أي ان:

$$\boxed{rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 1 \ , \ \ 3 > 1}$$

يتضح من النتيجة أعلاه ، أن معادلة الاستهلاك فوق التشخيص ، أي أن هناك أكثر من تقدير لمعالم دالة الاستهلاك.

بالنسبة للمعادلة الثانية – دالة الاستثمار.

1- شرط الترتيب:-

$$k^{**} = 3 \quad , G^{\Delta} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore k^{**} > G^{\Delta} - 1 \quad , 3 > 1$$

2- شرط الرتبة:-

$$rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = rank\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 0 & -\gamma_2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

في حين $G^{\Delta\Delta} = 2$

$$\therefore rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 3 \ -2=1$$

وبما ان

$$\boxed{rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = G^{\Delta} - 1 \quad , \quad k^{**} > G^{\Delta} - 1}$$

أي أن

$$\boxed{rank(\Pi_{\Delta^{**}}) = 1 \ , \ \ 3 > 1}$$

نتيجة الاختبار أعلاه لشرطي الترتيب والرتبة ، تعني بأن معادلة لاستثمار فوق التشخيص.

بالنسبة للمعادلة الثالثة :- دالة سعر الفائدة-

1- شرط الترتيب:-

$$k^{**}=3 \quad , \quad G^{\Delta}-1=2-1=1$$

$$\therefore k^{**}>G^{\Delta}-1 \quad , \quad 3>1$$

2- شرط الرتبة:-

$$\text{rank}\left(\Pi_{\Delta^{**}}\right)=\text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=3$$

في حين $G^{\Delta\Delta}=2$

$$\therefore \text{rank}\left(\Pi_{\Delta^{**}}\right)=3-2=1$$

وبما أن

$$\boxed{\text{rank}\left(\Pi_{\Delta^{**}}\right)=G^{\Delta}-1 \quad , \quad k^{**}>G^{\Delta}-1}$$

أي أن

$$\boxed{\text{rank}\left(\Pi_{\Delta^{**}}\right)=1 \quad , \quad 3>1}$$

ومنه يتضح بأن معادلة سعر الفائدة قد اجتازت اختبار شرط الترتيب والرتبة وبالتالي فهي معادلة فوق التشخيص ، والمنظومة ككل مشخصة بشكل نهائي.

7.6 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS)

تستخدم هذه الطريقة لتقدير معالم كل معادلة من معادلات المنظومة والتي تكون نتيجة اختبار التشخيص فيها مشخصة تماما، والخطوة الاولى لتطبيق هذه الطريقة تتمثل بإيجاد الصيغة المختزلة لكل متغير داخلي في المنظومة، أي التعبير عن المتغيرات الداخلية للمنظومة بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيا وبالتالي معرفة إمكانية التقدير لمعالم المنظومة من خلال معالم الصيغ المختزلة وبالذات معالم المعادلة المشخصة تماما في منظومة المعادلات ، أما الخطوة الثانية فتتمثل بتقدير معالم الصيغ المختزلة بالاسلوب الملائم كأن يكون تطبيق طريقة (OLS) وهذا يعني أن طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) تستند على نفس افتراضات طريقة (OLS) فضلا عن أن تكون المعادلة في المنظومة مشخصة تماما.

يتضح من أعلاه ، أن تقدير معالم الصيغة المختزلة $\left(\Pi_j\right)$ سوف تتصف بخاصية أفضل تقدير خطي غير متحيز(BLUE) ، ومنه سوف تكون تقديرات معالم المنظومة (المعالم الهيكلية)

المحسوبة من قيم (Π_j) متحيزة في العينات الصغيرة ولكنها متسقة عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية، أي عندما $(n \to \infty)$ ولاثبات ذلك دعنا ندرس منظومة المعادلات البسيطة التالية:

$$\left.\begin{array}{l} C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t \\ Y_t = C_t + Z_t \end{array}\right\} \qquad (18)$$

حيث أن

t=1, 2, …, n

C_t, Y_t تمثل الاستهلاك والدخل على التوالي ، وهي متغير الداخلية.

Z_t يمثل الاستثمار وهي متغير خارجي.

المنظومة أعلاه متكونة من علاقتين الاولى تمثل معادلة الاستهلاك والثانية متطابقة الدخل، ولغرض معرفة الطريقة الملائمة لتقدير معالم دالة الاستهلاك، لا بد من إجراء اختبار التشخيص لكل معادلة من معادلات المنظومة وكالاتي:

$$C_t - \beta_0 - \beta_1 Y_t = U_t$$
$$Y_t - C_t - Z_t = 0$$

والجدول التالي يبين معالم المنظومة (المعالم الهيكلية) بدلالة كافة متغيرات المنظومة.

Z_t	Y_t	C_t	1	المعادلة
0	$-\beta_1$	1	$-\beta_0$	1
-1	1	-1	0	2

بالنسبة لمعادلة الاستهلاك

اختبار الترتيب

صيغة الاختبار $k^{**} \geq G^{\Delta} - 1$

$$k^{**} = 1 \;,\; G^{\Delta} = 2$$

وبما أن $k^{**} = G^{\Delta} - 1$ ، أي أن 1=1 ، إذن معادلة الاستهلاك مشخصة تماما.

اختبار الرتبة

صيغة الاختبار $\text{rank}(\Pi_{\Delta^{**}}) = \text{rank}[\beta_{\Delta\Delta} \quad \Gamma_{**}] - G^{\Delta\Delta}$

حيث أن

$$\mathbf{rank}\left[\beta_{\Delta\Delta} \quad \Gamma_{**}\right] = \mathbf{rank}(-1) = 1$$

$$G^{\Delta\Delta} = 0$$

وبما أن $\mathbf{rank}\left(\Pi_{\Delta**}\right) = G^{\Delta} - 1$ ، أي أن 1=1 ، وهذا بدوره يؤكد تشخيص دالة الاستهلاك بشكل نهائي ، عليه فإن الأسلوب الملائم لتقدير معالم هذه الدالة هو طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، لذا فإن الخطوة التالية بعد التشخيص هو إيجاد الصيغة المختزلة ،أي ان

$$Y_t = -\beta^{-1}\Gamma X_t + \beta^{-1}U_t$$

أو

$$Y_t = \Pi X_t + V_t$$

حيث أن

$$V_t = \beta^{-1}U \;, \quad \Pi = -\beta^{-1}\Gamma$$

بالتطبيق على المنظومة المدروسة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1t} \\ V_{2t} \end{bmatrix}$$

حيث أن

$$\Pi = -\beta^{-1}\Gamma = -\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\beta_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta_1} \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_t = \beta^{-1}U_t = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{U_t}{1-\beta_1} \\ \dfrac{U_t}{1-\beta_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta_1} \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{U_t}{1-\beta_1} \\ \dfrac{U_t}{1-\beta_1} \end{bmatrix}$$

$$\therefore C_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{\beta_1}{1-\beta_1} Z_t + \frac{U_t}{1-\beta_1}$$

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} Z_t + \frac{U_t}{1-\beta_1}$$

وبشكل أكثر اختصارا ، يمكن إعادة كتابة الصيغتين المختزلتين أعلاه كالاتي:

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \Pi_{11} + \Pi_{12} Z_t + V_{1t} \\ Y_t &= \Pi_{21} + \Pi_{22} Z_t + V_{2t} \end{aligned}\right\} \quad \text{......(19)}$$

حيث أن

$$\Pi_{11} = \Pi_{21} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} \ , \quad \Pi_{12} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}, \ \Pi_{22} = \frac{1}{1-\beta_1}$$

ومنه يتبين بأن هناك إمكانية لتقدير معالم معادلات المنظومة ، وبالذات معالم دالة الاستهلاك وذلك على وفق العلاقات التالية:

1- الحد الثابت لدالة الاستهلاك

$$\beta_0 = \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{22}} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} \Big/ \frac{1}{1-\beta_1} = \beta_0$$

2- الميل الحدي لدالة الاستهلاك.

$$\beta_1 = \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1} \Big/ \frac{1}{1-\beta_1} = \beta_1$$

الاستنتاج أعلاه، يؤكد بأن دالة الاستهلاك فعلا مشخصة تماما وذلك لان معالمها تتصف بصفة التقديرات الوحيدة.

بما إن الاخطاء العشوائية للصيغ المختزلة رقم (19) تخضع للفرضية التالية $V_{1t} \sim N(0, \sigma^2_{V1})$ ، $V_{2t} \sim N(0, \sigma^2_{V2})$ وأن V_{1t} مستقلة عن V_{2t} ، إذن يمكن تقدير معالمها بطريقة (OLS).

بطرح الصيغ المختزلة من أوساطها الحسابية نحصل على نموذج مختزل مقاسا بالانحرافات (التقدير حول نقطة المتوسط).

$$\left.\begin{aligned} (C_t - \overline{C}) &= \frac{\beta_1}{1-\beta_1}(Z_t - \overline{Z}) + \frac{1}{1-\beta_1}(U_t - \overline{U}) \\ (Y_t - \overline{Y}) &= \frac{1}{1-\beta_1}(Z_t - \overline{Z}) + \frac{1}{1-\beta_1}(U_t - \overline{U}) \end{aligned}\right\} \quad \text{......(20)}$$

بعبارة أخرى

$$c_t = \frac{\beta_1}{1-\beta_1} z_t + \frac{1}{1-\beta_1}\left(U_t - \overline{U}\right)$$
$$y_t = \frac{1}{1-\beta_1} z_t + \frac{1}{1-\beta_1}\left(U_t - \overline{U}\right)$$

حيث أن

$$c_t = \left(C - \overline{C}\right),\ y_t = \left(Y_t - \overline{Y}\right),\ z_t = \left(Z_t - \overline{Z}\right)$$

وبذلك يمكن إعادة كتابة الشكل المختزل لدالة الاستهلاك كالاتي: $c_t = \Pi_{11} z_t + v_t$

حيث أن $\Pi_{11} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}\ ,\ v_t = \frac{1}{1-\beta_1}\left(U_t - \overline{U}\right)$

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معالم الشكل المختزل لدالة الاستهلاك أعلاه ، نحصل على:

$$\hat{\Pi}_{11} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2}$$

حيث أن $\left(\hat{\Pi}_{11}\right)$ تمثل القيمة التقديرية للمعلمة $\left(\Pi_{11}\right)$.

وبما أن $\Pi_{11} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}$ ، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2} = \frac{b_1^*}{1-b_1^*} \qquad \text{.........(21)}$$

حيث أن $\left(b_1^*\right)$ تمثل التقدير غير المباشرة للمعلمة $\left(\beta_1\right)$ ، بتعديل العلاقة (21) نحصل على :

$$\therefore b_1^* = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2 + \sum c_t z_t} \qquad \text{.........(22)}$$

ومن المعادلة التعريفية للدخل لدينا $Y_t = C_t + Z_t$

أو بالانحرافات $y_t = c_t + z_t$

وبالضرب في المتغير $\left(z_t\right)$ والجمع نحصل على:

$$\sum y_t z_t = \sum c_t z_t + \sum z_t^2$$

وبالتعويض في الصيغة رقم (22) أعلاه نحصل على:

$$b_1^* = \frac{\sum c_t z_t}{\sum y_t z_t} \qquad \text{.........(23)}$$

حيث أن $b_1^* = b_{1ILS}$ تمثل تقديرات المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) بالرجوع إلى الصيغة المقاسة بالانحرافات المرقمة (20) والتعويض بالصيغة التقديرية المرقمة (23) نحصل على:

$$b_{1ILS} = \frac{\sum\left[\beta_1/(1-\beta_1).(Z_t-\overline{Z})^2 + 1/(1-\beta_1).(Z_t-\overline{Z})\,(U_t-\overline{U})\right]}{\sum\left[1/(1-\beta_1).(Z_t-\overline{Z})^2 + 1/(1-\beta_1).(Z_t-\overline{Z})\,(U_t-\overline{U})\right]}$$

$$\therefore b_{1ILS} = \frac{1/(1-\beta_1)\left[\beta_1\sum(Z_t-\overline{Z})^2 + \sum(Z_t-\overline{Z})(U_t-\overline{U})\right]}{1/(1-\beta_1)\left[\sum(Z_t-\overline{Z})^2 + \sum(Z_t-\overline{Z})(U_t-\overline{U})\right]}$$

$$\therefore b_{1ILS} = \frac{\beta_1\sum z_t^2 + \sum z_t u_t}{\sum z_t^2 + \sum z_t u_t}$$

بالتقسيم على حجم العينة (n)

$$b_{1ILS} = \frac{\beta_1\sum\frac{z_t^2}{n} + \sum\frac{z_t u_t}{n}}{\frac{\sum z_t^2}{n} + \frac{\sum z_t u_t}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} E(b_{1ILS}) = \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{\beta_1\left(\sum z^2/n\right) + \left(\sum zu/n\right)}{\left(\sum z^2/n\right) + \left(\sum zu/n\right)}\right]$$

أي أن عندما $(n \to \infty)$ فإن $\sum z_t u_t/n \to 0.0$ ومنه نحصل على:

$$\lim_{n\to\infty} E(b_{1ILS}) = \beta_1$$

وهذا يعني تقديرات المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) غير متحيزة عندما $(n \to \infty)$ ، أي عندما يكون حجم العينة كبير.

أما تباين هذا المقدر فيمكن اشتقاقه كآلاتي ، من العلاقة رقم (23) لدينا:

$$b_{1ILS} = \frac{\sum c_t\, z_t}{\sum z_t\, y_t}$$

ولمنظومة المعادلات الآنية المرقمة (18) يمكن الحصول على تباين الميل الحدي لمعادلة الاستهلاك على وفق الصيغة العامة للتباين التالية:

$$Var(b_{1ILS}) = E\left[b_{1ILS} - E(b_{1ILS})\right]^2 = E(b_{1ILS} - \beta_1)^2$$

وبما أن دالة الاستهلاك المقاسة بالانحرافات ، يمكن وضعها بالشكل التالي:

$$c_t = \beta_1 y_t + u_t$$

$$\therefore b_{1ILS} = \frac{\sum z(\beta_1 y_t + u_t)}{\sum y_t z_t}$$

$$= \frac{\beta_1 \sum z_t y_t + \sum z_t u_t}{\sum y_t z_t} = \beta_1 + \frac{\sum z_t u_t}{\sum y_t z_t}$$

بالتعويض نحصل على:

$$Var(b_{1ILS}) = E\left(\beta_1 + \frac{\sum z_t u_t}{\sum y_t z_t} - \beta_1\right)^2$$

$$= E\left(\frac{\sum z_t u_t}{\sum y_t z_t}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum y_t z_t\right)^2} E(z_t u_t)^2$$

$$= \frac{1}{\left(\sum y_t z_t\right)^2} E\left(z_t^2 u_t^2 + 2\sum z_t z_{t'} . u_t u_{t'}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum y_t z_t\right)^2} \left[\sum z_t^2 E(u_t^2) + 2\sum z_t . z_{t'} E(u_t . u_{t'})\right]$$

وبما أن

$$E(u_t u_{t'}) = 0$$

$$\therefore Var(b_{1ILS}) = \frac{\sigma_u^2}{\left(\sum y_t z_t\right)^2} . \sum z_t^2$$

1- بالضرب والقسمة في المقدار $\sum y_t^2$

$$Var(b_{1ILS}) = \frac{\sigma_u^2 \sum z_t^2 \sum y_t^2}{\left(\sum y_t z_t\right)^2 \sum y_t^2} = \frac{\sigma_u^2}{r_{zy}^2 \sum y_t^2} \quad \text{.........} (24)$$

أو يمكن أن توضع بشكل آخر ، بما أن

$$r_{zy}^2 = \frac{\left(\sum y_t z_t\right)^2}{\sum z_t^2 \sum y_t^2}$$

$$= \frac{\left[n\sum Z_t Y_t - \left(\sum Z_t\right)\left(\sum Y_t\right)\right]^2}{\left[n\sum Z_t^2 - \left(\sum Z_t\right)^2\right]\left[n\sum Y_t^2 - \left(\sum Y_t\right)^2\right]}$$

$$= \frac{n^2\left[\sum Z_t Y_t - \frac{\left(\sum Z_t\right)\left(\sum Y_t\right)}{n}\right]^2}{n\left[n\sum Z_t^2 - \left(\sum Z_t\right)^2\right]\left[\sum Y_t^2 - \frac{\left(\sum Y_t\right)^2}{n}\right]}$$

بالتعويض في صيغة تباين الميل الحدي المرقمة (24) ، نحصل على:

$$Var\left(b_{1ILS}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum y_t^2} \cdot \left(\frac{\left[\sum Y_t^2 - \frac{\left(\sum Y_t\right)^2}{n}\right]\left[n\sum Z_t^2 - \left(\sum Z_t\right)^2\right]}{n\left[\sum Z_t Y_t - \frac{\left(\sum Z_t\right)\left(\sum Y_t\right)}{n}\right]^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma_u^2 \sum y_t^2 \left[n\sum Z_t^2 - \left(\sum Z_t\right)^2\right]}{n\sum y_t^2 . \left(\sum z_t y_t\right)^2}$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty} Var\left(b_{1ILS}\right) = \sigma_u^2 \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{n\sum Z_t^2 - \left(\sum Z_t\right)^2}{\left(\sum z_t y_t\right)^2}\right] . \frac{1}{n}\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} Var\left(b_{1ILS}\right) = \sigma_u^2 \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\sum Z_t^2 - \left(\sum Z_t\right)^2}{\left(\sum z_t y_t\right)^2}\right] . \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

وبما أن الشرطين التاليين

$$1- \quad \lim_{n\to\infty} E\left(b_{1ILS}\right) = \beta \quad , \quad 2 - \lim_{n\to\infty} Var\left(b_{1ILS}\right) = 0$$

قد تحققا في مقدرات (ILS) ـ عليه فإن المقدر (b_{1ILS}) متسق (Consistent)

تجدر الاشارة هنا إلى ان هناك طريقة اخرى لايجاد مقدرات المربعات الصغرى غير المباشرة، وتتلخص هذه الطريقة بتقدير معالم الصيغ المختزلة للمتغيرات الداخلية ، أي أن

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \Pi_{11} + \Pi_{12} Z_t + V_{1t} \\ Y_t &= \Pi_{21} + \Pi_{22} Z_t + V_{2t} \end{aligned}\right\} \quad \text{.......... (25)}$$

وبأستخدام الأنحرافات

$$\left.\begin{aligned} c_t &= \Pi_{12} z_t + v_{1t} \\ y_t &= \Pi_{22} z_t + v_{2t} \end{aligned}\right\} \quad \text{.......... (26)}$$

وكما بينا سابقا

$$\beta_0 = \frac{\Pi_{11}}{\Pi_{22}} \quad , \quad \beta_1 = \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}$$

من مجموعة معادلات الشكل المختزل رقم (26) لدينا التقديرات بأستخدام (OLS) التالية:

$$\hat{\Pi}_{12} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2} \quad , \quad \hat{\Pi}_{22} = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}$$

وعلى وفق العلاقة غير المباشرة لتقدير الميل الحدي في دالة الاستهلاك نحصل على:

$$b_{1ILS} = \frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}} = \frac{\dfrac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2}}{\dfrac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t y_t}$$

وهو نفس التقدير السابق.

أما الحد الثابت لدالة الاستهلاك في المنظومة المرقمة (18) ، يمكن تقديره بشكل غير مباشر ، أي أن نبدأ من الصيغة المختزلة للاستهلاك والمرقمة (25) ، حيث أن

$$\hat{\Pi}_{11} = \overline{C} - \hat{\Pi}_{12} \overline{Z}$$

وعلى وفق العلاقة الحاصل عليها من الصيغة المختزلة ، لدينا

$$b_{0ILS} = \frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{22}}$$

علما بأن تقديرات (OLS) لمعالم الصيغ المختزلة تعطى كالاتي:

$$\hat{\Pi}_{22} = \frac{\sum y_t z_t}{\sum z_t^2} \quad , \quad \hat{\Pi}_{12} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t^2}$$

بالتعويض وإعادة الترتيب نحصل على

$$b_{0ILS} = \frac{\overline{C} - \left(\sum c_t\, z_t \Big/ \sum z_t^2\right)\overline{Z}}{\sum y_t\, z_t \Big/ \sum z_t^2}$$

$$\therefore b_{0ILS} = \left(\frac{\sum z_t^2}{\sum z_t\, y_t}\right)\overline{C} - \left(\frac{\sum c_t\, z_t}{\sum z_t\, y_t}\right)\overline{Z}$$

$$= \left(\frac{\sum z_t^2}{\sum z_t\, y_t}\right)\overline{C} - b_{1ILS}\,\overline{Z}$$

ويمكن البرهنة بأن تباين الحد الثابت أعلاه ، يعطى على وفق الصيغة التالية:

$$Var\left(b_{0ILS}\right) = \frac{\sigma_u^2 \sum z_t^2 \sum Z_t^2}{n\left(\sum z_t\, y_t\right)^2} = \frac{\sigma_u^2\left(\sum z_t^2 + n\,\overline{Z}^2\right)}{n\, r_{zy}^2 \sum y_t^2}$$

وبنفس الاسلوب السابق ، يمكن الاثبات بأن الحد الثابت المقدر بطريقة (ILS) هو تقدير غير متحيز ومتسق بنفس الوقت.

7.7 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (2SLS)

تستخدم هذه الطريقة لتقدير معالم المعادلات في المنظومة التي تكون في حالة التشخيص التام، حيث تشير تسمية هذه الطريقة إلى أن الاسلوب المستخدم فيها يكون على مرحلتين :

المرحلة الاولى: تحديد المتغير الداخلي في المعادلة المطلوب تقدير معالمها ، ثم ايجاد الصيغة المختزلة لهذا المتغير ، واستخدام طريقة (OLS) بعد توفر الشروط اللازمة في عملية تقدير معالم الصيغة المختزلة وبالتالي إيجاد القيم التقديرية لمتغيرات المنظومة الداخلية .

فعلى سبيل المثال ، بإعادة كتابة الشكل الهيكلي المرقم (14) كالاتي:

$$Y = \beta\, Y + \Gamma\, X + U$$

حيث يتم ايجاد قيم مصفوفتي β و Γ بإستخدام طريقة (OLS) ونستخرج قيم Y_t التقديرية عن طريق ايجاد الشكل المختزل ، أي أن:

$$\hat{Y}_t = \left(-\beta^{-1}\Gamma\right)X_t$$

المرحلة الثانية : أن تستخدم طريقة (OLS) مرة اخرى في تقدير معالم الشكل الهيكلي بعد إحلال قيم $\left(\hat{Y}\right)$ المقدرة من المرحلة الاولى محل قيم Y . ولكي يتم التقدير باستخدام طريقة (2SLS) تقدر معالم كافة معادلات المنظومة باستخدام (OLS) بعبارة أخرى:

$$\begin{bmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{\gamma}\end{bmatrix}_{OLS} = (Z'Z)^{-1} Z'Y = \begin{bmatrix} Y'Y & Y'X \\ X'Y & X'X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y' \\ X' \end{bmatrix} Y$$

حيث أن $Z = [Y \quad X]$ وتستخدم هذه المعالم المقدرة في إيجاد معالم الشكل المختزل والتي بواسطتها يتم استخراج قيم $(\hat{Y})$ والتي تساوي:

$$\hat{Y} = X\hat{\Pi} = X(X'X)^{-1} X'Y$$

بعد ذلك يتم احلال قيم $(\hat{Y})$ في كل معادلة من معادلات المنظومة بدلا من قيم Y وتكرر عملية التقدير باستخدام طريقة (OLS) لمعادلات الشكل الهيكلي وبالشكل الاتي:

$$\begin{bmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{\gamma}\end{bmatrix}_{2SLS} = \begin{bmatrix} \hat{Y}'\hat{Y} & \hat{Y}'X \\ X'\hat{Y} & X'X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}' \\ X' \end{bmatrix} Y$$

ولغرض توضيح هذه الطريقة ، دعنا ندرس منظومة المعادلات الانية المرقمة (18) والتي كانت فيها معادلة الاستهلاك ذات تشخيص تام ، حيث تضمنت متغير داخلي متمثلا بـ (Y_t) وكانت الصيغة المختزلة له مقاسة بالانحرافات كالاتي:

$$y_t = \Pi_{22} z_t + v_{2t}$$

وكمرحلة أولى تم استخدام طريقة (OLS) لتقدير معالم الصيغة المختزلة أعلاه ، بعبارة اخرى:

$$\hat{\Pi}_{22} = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}$$

حيث استخدمت التقديرات الأولية للمتغير الداخلي التالي:

$$\hat{y}_t = \hat{\Pi}_{22} z_t = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2} . z_t$$

في عملية تقدير معادلة الاستهلاك الواردة في منظومة المعادلات ، أي أن

$$c_t = \beta_1 \hat{y}_t + u_t$$

بعبارة اخرى

$$c_t = \beta_1 \left(\frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2} \right) z_t + u_t$$

وفي المرحلة الثانية ، نستخدم طريقة (OLS) في تقدير معالم دالة الاستهلاك، أي أن

$$b_{2SLS} = \frac{\left(\frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}\right)\sum c_t z_t}{\left(\frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t^2}\right)^2 \sum z_t^2}$$

بالاختصار وإعادة الترتيب ، نحصل على

$$b_{2SLS} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum z_t y_t} \quad \text{..........} (27)$$

وهو نفس التقدير السابق والحاصل عليه بطريقة (**ILS**) ، أي أن في حالة التشخيص التام للمعادلة ضمن المنظومة تكون تقديرات طريقة (**ILS**) مطابقة تماما لتقديرات طريقة (**2SLS**).

7.8 طريقة المتغيرات المساعدة (IV)

تصلح هذه الطريقة ، كما هو الحال بالنسبة لطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وطريقة المربعات غير المباشرة لتقدير معالم المعادلات الهيكلية التي تكون مشخصة تماما وتتمثل هذه الطريقة في اختيار عدد من المتغيرات المساعدة من بين المتغيرات الخارجي في المنظومة ، بحيث تتصف أن هذه المتغيرات المساعدة بالخواص التالية:

1- أن تكون على درجة كبيرة من الارتباط بالمتغير الداخلي للمعادلة الهيكلية المطلوب تقدير معالمها.

2- أن تكون متغيرات خارجية فعلا ، أي أنها غير مرتبطة بعنصر الخطأ في المعادلة.

3- أن يكون ارتباطها منعدما أو ضعيفا جدا بالمتغيرات الخارجية أو الداخلية المرتدة زمنيا التي تظهر في المعادلة وذلك تفاديا لمشكلة التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة.

بالرجوع إلى منظومة المعادلات المرقمة (**18**) بالذات إلى المعادلة الاولى منها، حيث كانت نتيجة تشخيص هذه المعادلة مشخصة تماما ، وبالتالي يمكن استخدام طريقة المتغيرات المساعدة (**IV**) لتقدير معالمها . وعليه يجب اختيار متغيرا يتصف بالخصائص المذكورة أعلاه لكي يأخذ دور المتغير المساعد في تقدير معالم هذه المعادلة ، وليكن (Z_t) بحيث يكون على درجة عالية من الارتباط مع المتغير الداخلي (C_t) ، إضافة إلى استقلاله عن عنصر الخطأ العشوائي (U_t) ، وبإعادة كتابة المعادلة الاولى من المنظومة المذكورة ، اخذين بنظر الاعتبار التقدير حول نقطة المتوسط.

$$c_t = \beta_1 y_t + U_t$$

وبالضرب في انحرافات المتغير المساعد (Z_t) وإدخال علامة الجمع نحصل على :

$$\sum c_t z_t = \beta_1 \sum y_t z_t + \sum z_t U_t$$

حيث أن

$$z_t = Z_t - \overline{Z} \quad \text{وأن} \quad E(z_t U_t) = 0$$

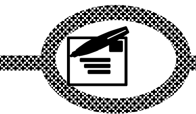
يتضح من أعلاه ، أن تقدير المتغيرات المساعدة للمعلمة الهيكلية (β_1) يعطى على وفق الصيغة التالية:

$$b_{1IV} = \frac{\sum c_t z_t}{\sum y_t z_t} \quad \text{.......... (28)}$$

ويلاحظ من الصيغة رقم (28) أعلاه ، أن طريقة المتغيرات المساعدة مطابقة لطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين وطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة ، وكما بينا سابقا في الجزء (6-10) من هذا الفصل ، فإن مثل هذه التقديرات المحتسبة على وفق الصيغ المرقمة (23) ، (27) و (28) ، تكون متسقة وغير متحيزة في حالة العينات الكبيرة ، أي عندما $(n \to \infty)$.

تجدر الاشارة هنا إلى أن طريقة المتغيرات المساعدة تعد من الطرق السهلة لتقدير معالم معادلات النموذج الهيكلي التي تكون مشخصة تماما ، وأهم ما يؤخذ على هذه الطريقة هو الحالة التحكيمية في اختيار المتغيرات المساعدة ، أي أنه يمكن أن تتوفر عدة متغيرات بديلة ، تصلح أن تكون متغيرات مساعدة وطبيعي استخدام أي واحد منها سوف يعطي تقديرات مختلفة للمعالم الهيكلية ، وبالتالي يمكن القول بأنها تقديرات تحكيمية.

وفي الختام يتضح بأن جميع طرق تقدير معالم منظومة المعادلات الانية ، والتي تطرقنا إليها في هذا الفصل تنتهي إلى مجموعة طرق تقدير كل معادلة من المعادلات المنظومة على حدة، وتعرف أحيانا بطرق المعادلة الواحدة . وفي الواقع هناك طرق أخرى تطبق على كل معادلات المنظومة دفعة واحدة نذكر منها : طريقة المربعات الصغرى ذات المراحل الثلاث وطريقة الامكان الأعظم ذات المعلومات الكاملة ، ومثل هذه الطرق متقدمة جدا وتقع خارج نطاق طبيعة هذا الكتاب.



مثال تطبيقي (5)

قدر معالم منظومة العرض والطلب المرقمة (8) والتي تم مناقشة تشخيصها في الجزء (3-10) و (4-10) من هذا الفصل والمعاد كتابتها في أدناه:

$$D_t = A_0 + A_1 P_t + U_{1t}$$

$$S_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 W_t + U_{2t}$$

إذا علمت بأن المتغيرات الداخلية والخارجية في المنظومة أخذت البيانات التالية:

الرقم القياسي لحالة الجو	الدخل	سعر الطن	الكمية المعروضة= الكمية المطلوبة
W_t	Y_t	P_t	$D_t=S_t$
105	680	970	916
110	690	912	820
112	710	780	660
116	740	710	320
105	745	680	770
108	750	660	810
118	770	675	801
100	785	615	912
105	790	630	980
110	795	620	1114
95	810	600	1100
98	820	612	1330
95	835	635	1210
87	850	625	1115
98	855	610	1095
96	870	615	1200

الحل:

كما رأينا سابقا أن معادلة كل من العرض والطلب في هـذه المنظومـة قـد اجتـازت اختبـار شرط الترتيـب وشرط الرتبة وبالتالي فهي منظومة مشخصة تماما ، وذلك لوجود حل وحيد لتقدير معالم كل معادلة فيها ، وعليه يمكـن اسـتخدام اسلوب المربعات الصغرى غير المباشرة لتقدير معالمها ، وهذا بـدوره يتطلـب ايجـاد النمـوذج المختـزل لكـل متغـير داخـلي وكالاتي:

$$D_t = S_t = H_{10} + H_{11}Y_t + H_{12}W_t + V_{1t}$$

$$P_t = H_2O + H_{21}Y_t + H_{22}W_t + V_{2t}$$

وباستخدام اسلوب (OLS) يمكن تقدير معالم النموذج المختزل أعلاه ، بالنسبة لنموذج العرض (أو الطلب) المختزل

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{10} \\ \hat{\Pi}_{11} \\ \hat{\Pi}_{12} \end{bmatrix}_{LS} = (X'X)^{-1}X'S = (X'X)^{-1}X'D$$

أما بالنسبة لنموذج السعر المختزل ، يقدر بموجب الصيغة التالية:

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{20} \\ \hat{\Pi}_{21} \\ \hat{\Pi}_{22} \end{bmatrix}_{LS} = (X'X)^{-1}X'P$$

حيث أن $\hat{\Pi}_{1j}$ و $\hat{\Pi}_{2j}$ تمثل تقديرات للمعالم Π_{1j} و Π_{2j} وأن $J=0.1, 2, \ldots, k$

أما

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum Y_t & \sum W_t \\ \sum Y_t & \sum Y_t^2 & \sum W_t Y_t \\ \sum W_t & \sum W_t Y_t & \sum W_t^2 \end{bmatrix} \quad , \quad X'P = \begin{bmatrix} \sum P_t \\ \sum P_t Y_t \\ \sum P_t W_t \end{bmatrix}$$

$$X'S = X'D = \begin{bmatrix} \sum S_t \\ \sum S_t Y_t \\ \sum S_t W_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum D_t \\ \sum D_t Y_t \\ \sum D_t W_t \end{bmatrix}$$

ومن البيانات المعطاة في المثال نحصل على:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & 12495 & 1658 \\ 12495 & 9809125 & 1289540 \\ 1658 & 1289540 & 172906 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 72.364967 & -0.048915 & -0.329098 \\ -0.048915 & 0.0000383 & 0.000184 \\ -0.329098 & 0.000184 & 0.001793 \end{bmatrix}$$

$$X'S = X'D = \begin{bmatrix} 15153 \\ 11987675 \\ 1546213 \end{bmatrix}, \quad X'P = \begin{bmatrix} 10949 \\ 8468720 \\ 1140566 \end{bmatrix}$$

$$b_{LS} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{10} \\ \hat{\Pi}_{11} \\ \hat{\Pi}_{12} \end{bmatrix}_{LS} = \begin{bmatrix} 72.364967 & -0.048915 & -0.329098 \\ & 0.0000383 & 0.000184 \\ & & 0.001793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15153 \\ 11987675 \\ 1546213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1311.31169 \\ 1.484346 \\ -14.771255 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{S}_t = \hat{D}_t = 1311.31169 + 1.484346\, Y_t - 14.771255\, W_t$$

في حين تقدير الصيغة المختزلة لمتغير السعر يعطى كالاتي:

$$b = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{20} \\ \hat{\Pi}_{21} \\ \hat{\Pi}_{22} \end{bmatrix}_{LS} = \begin{bmatrix} 72.364967 & -0.048915 & -0.329098 \\ & 0.0000383 & 0.000184 \\ & & 0.001793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10949 \\ 8468720 \\ 1140566 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2716.96035 \\ -2.038093 \\ -4.305766 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{P}_t = 2716.96035 - 2.038093\, Y_t - 4.305766\, W_t$$

وباستخدام هذه التقديرات الاولية للنموذج المختزل ، يمكن الحصول وبشكل غير مباشر على تقديرات معالم منظومة العرض والطلب وكالاتي:

1- تقدير معالم معادلة الطلب

$$a_0 = \hat{\Pi}_{20}\left(\frac{\hat{\Pi}_{10}}{\hat{\Pi}_{20}} - \frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}}\right)$$

$$= 2716.96035\left(\frac{1311.31169}{2716.96035} - \frac{-14.771255}{-4.305766}\right)$$

$$\therefore a_0 = -8009.425891$$

$$a_1 = \frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}} = \frac{-14.771255}{-4.305766} = 3.430575$$

$$a_2 = \hat{\Pi}_{21}\left(\frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{21}} - \frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}}\right)$$

$$= -2.038093\left(\frac{1.484346}{-2.038093} = \frac{-14.771255}{-4.305766}\right)$$

$$\therefore a_2 = 8.476178$$

<u>2 – تقدير معالم معادلة العرض</u>

$$b_0 = \hat{\Pi}_{20}\left(\frac{\hat{\Pi}_{10}}{\hat{\Pi}_{20}} - \frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{21}}\right)$$

$$= 2716.96035\left(\frac{1311.31169}{2716.96035} - \frac{1.484346}{-2.038093}\right)$$

$$\therefore b_0 = 3290.076742$$

$$b_1 = \frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{21}} = \frac{1.484346}{-2.038093} = -0.728301$$

$$b_2 = \hat{\Pi}_{22}\left(\frac{\hat{\Pi}_{12}}{\hat{\Pi}_{22}} - \frac{\hat{\Pi}_{11}}{\hat{\Pi}_{21}}\right)$$

$$= (-4.305766)\left(\frac{-14.771255}{-4.305766} - \frac{1.484346}{-2.038093}\right)$$

$$\therefore b_2 = -17.907149$$

وعليه فإن الصيغة التقديرية لمنظومة العرض والطلب ، توضع بالشكل التالي:

$$\hat{D}_t = -8009.425891 + 3.430575\,P_t + 8.476178\,W_t$$

$$\hat{S}_t = 3290.076742 - 0.728301\,P_t - 17.907149\,W_t$$

7.9 التنبؤ باستخدام منظومة المعادلات الآنية

كما بينا في الجزء (2-7) من الفصل الثاني إن التنبؤ باستخدام المعادلة المنفردة يمكن ان يوضع بشكل تنبؤ نقطي ، اي قيمة مفردة أو ان يكون تنبؤ فتروي ، اي قيمة ضمن فترة محددة، حيث كانت العلاقات المدروسة تبين اللأثر بإتجاه واحد ، وفي هذا الجزء سوف نتناول التنبؤ في حالة منظومة المعادلات الآنية والتي بموجبها يدرس الأثر المباشر وغير المباشر بين المتغيرات الداخلية والخارجية المتظمنة في معادلات المنظومة بالرجوع الى النموذج الهيكلي المرقم (4) والمعاد كتابته في أدناه :

$$\beta Y_t + \Gamma X_t = \mu_t$$

مصفوفة (β) في الحد الأول تتضمن المعالم الخاصة بالمتغيرات الداخلية ، في حين مصفوفة (Γ) تتضمن المعالم ذات العلاقة بالمتغيرات الداخلية والخارجية المرتدة زمنياً، عليه فإن الشكل الهيكلي أعلاه يبين الأثر المباشر والغير المباشر والمتولد نتيجة للترابط والتشابك بين معادلات منظومة المعادلات الآنية .

إن التنبؤ باستخدام منظومة المعادلات الآنية عملية صعبة ومعقدة ، لذا سوف أحاول الخوض في هذا الموضوع من خلال إعطاء أمثلة بسيطة .

مثال تطبيقي (6)



منظومة المعادلات التالية تمثل الشكل الهيكلي لنموذج اقتصادي بسيط متضمن أربعة معادلات ومتطابقة:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 (Y_t - T_t) + \mu_{1t}$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \mu_{2t}$$

$$T_t = \lambda Y_t + \mu_{3t}$$

$$M_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_t + \gamma_2 P_{t-1} + \mu_{4t}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + E_t - M_t$$

المنظومة أعلاه تتضمن خمسة متغيرات داخلية وهي C_t تمثل الاستهلاك الخاص ، I_t تمثل الاستثمار ، T_t تمثل الضرائب ، M_t تمثل الاستيرادات ، Y_t تمثل الدخل في حين هناك

متغيران خارجيان وهما G_t تمثل الانفاق الحكومي ، E_t تمثل الصادرات ، أما Y_{t-1} يمثل متغير داخلي مرتد زمنياً للدخل و P_{t-1} يمثل متغير خارجي مرتد زمنياً للأسعار .

بتوفير البيانات اللازمة لكافة المتغيرات الداخلية والخارجية وكذلك المتغيرات المرتدة زمنياً أمكن تقدير معالم المعادلات السلوكية الاربعة الأولى ، حيث كانت معادلات المنظومة في حالة على وفق التشخيص ، لذا أختير الأسلوب الملائم لعملية التقدير وكانت النتيجة كالآتي:

$$\hat{C}_t = 20 + 0.8(Y_t - T_t)$$

$$\hat{I}_t = 2 + 0.1Y_t + 0.3Y_{t-1}$$

$$\hat{T}_t = 0.2Y_t$$

$$\hat{M}_t = 3 + 0.1Y_t + 0.1P_{t-1}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + E_t - M_t$$

الآن وبعد تقدير المعالم الهيكلية ، يمكن إجراء التنبؤ بما ستكون عليه قيم المتغيرات الداخلية بالمستقبل ، فعلى فرض بإن المتغيرات الخارجية والمتغيرات المرتدة زمنياً سوف يكون كالآتي:

$$G_t = 20 \text{ , } E_t = 10 \text{ , } Y_{t-1} = 150 \text{ , } P_{t-1} = 110$$

بإدخال هذه القيم في الشكل الهيكلي المقدر وتحويل كل المتغيرات الداخلية الى الجهة اليسرى من المنظومة نحصل على:

$$C_t = 0.8Y_T + 0.8T_t = 20$$

$$I_t - 0.1Y_t = 2 + 0.3(150) = 47$$

$$T_t = 0.2Y_t$$

$$M_t - 0.1Y_t = 3 + 0.1(110) = 14$$

$$Y_t - C_t - I_t + M_t = 20 + 10 = 30$$

وبالتعويض عن قيمة (T_t) بما تساويها $(T_t = 0.2Y_t)$ في معادلة الانفاق الخاص نحصل على :

$$C_t - 0.8Y_t + 0.8(0.2Y_t) = 20$$

$$\therefore C_t - 0.8Y_t + 0.16Y_t = 20$$

$$\therefore C_t = 20 + 0.64Y_t$$

وبالتالي فإن التعويض عن قيمة الاستهلاك الخاص (C_t) والاستثمار (I_t) والاستيرادات (M_t) في المتطابقة ، نحصل على قيمة للدخل (Y_t) وكالآتي:

$$Y_t - (20 + 0.64Y_t) - (47 + 0.1Y_t) + (14 + 0.1Y_t) = 30$$

$$\therefore 0.36Y_t = 83 \Rightarrow Y_t = 230.5$$

وبالتعويض عن قيمة الدخل الحاصل عليه في أعلاه مرة أخرى في صيغة الاستهلاك نحصل على :

$$C_t - 0.64(230.5) = 20$$

$$\therefore C_t = 167.5$$

في حين التعويض في صيغة الاستثمار يعطي النتيجة التالية:

$$I_t - 0.1(230.5) = 47$$

$$\therefore I_t = 70$$

أما قيمة الضرائب (T_t) ، نحصل عليها كذلك بالتعويض عن (Y_t) بما يساويها اي إن :

$$T_t = 0.2(230.5) = 46.1$$

وأخيراً قيمة الاستيرادات سوف تبلغ المستوى التالي:

$$M_t - 0.1(230.5) = 14$$

$$\therefore M_t = 37$$

يتضح من أعلاه ، انه قد تم حل منظومة المعادلات الآنية لكل متغير داخلي فيها وبالتالي التنبؤ بما سوف تكون عليه هذه المتغيرات الداخلية عندما أخذت الخارجية والمرتدة زمنياً مستوى معين ، عليه فإن القيم التنبؤية لكافة المتغيرات الداخلية يمكن إجمالها بالشكل التالي:

$$C_t = 167.5\ ,\ T_t = 46.1\ ,\ Y_t = 230.5\ ,\ I_t = 70\ ,\ M_t = 37$$

وهكذا لأي مستوى معطى للمتغيرات الخارجية والمتغيرات المرتدة زمنياً ، يمكن ايجاد القيم المستقبلية (التنبؤية) لكل المتغيرات الداخلية في المنظومة المدروسة.

تجدر الإشارة هنا، الى ان عملية التنبؤ أعلاه قد تمت بإجراء التعويض المتتابع بكل معادلة من معادلات المنظومة الأنية وذلك بعد معرفة المستوى المطلوب لكل متغير خارجي في المنظومة نفس النتيجة أعلاه يمكن الحصول عليها باستخدام اسلوب المصفوفات والموجهات . وبالرجوع الى الشكل الهيكلي المرقم (4) وإعادة كتابة معادلات المنظومة المقدرة كالاتي :

$$\beta Y + \Gamma X$$

حيث ان

Γ, β مصفوفات مربعة تمثل كل واحدة منها المعلام المقدرة للمتغيرات الداخلية والخارجية على التوالي ، وذات مرتبة مساوية الى عدد معادلات المنظومة.

حيث إن:

Y تمثل موجة االمتغيرات الداخلية في المنظومة .

X تمثل موجة للمتغيرات الخارجية ، علماًبإن العنصر الأول منه مساوياً الى الواحد لتمثيل الحد الثابت في المنظومة .

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.8 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ T_t \\ M_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ E_t \\ p_{t-1} \\ G_t \\ Y_{t-1} \end{bmatrix}$$

وبإعادة الترتيب ، نحصل على

$$Y = -\beta^{-1}\Gamma X$$

$$\therefore Y=\begin{bmatrix}C_t\\I_t\\T_t\\M_t\\Y_t\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1&0&0.8&0&-0.8\\0&1&0&0&-0.1\\0&0&1&0&-0.2\\0&0&0&1&-0.1\\-1&-1&0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-20&0&0&0&0\\-2&0&0&0&-0.3\\0&0&0&0&0\\-3&0&-0.1&0&0\\0&-1&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10\\110\\20\\150\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}C_t\\I_t\\T_t\\M_t\\Y_t\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2.778&1.777778&-2.222222&-1.777778&1.777778\\0.278&1.277778&-0.222222&-0.277778&0.277778\\0.556&0.555556&0.555556&-0.555556&0.555556\\0.278&0.277778&-0.222222&0.722222&0.277778\\2.778&2.777778&-2222222&-2.777778&2.777778\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}-20&0&0&0&0\\-2&0&0&0&-0.3\\0&0&0&0&0\\-3&0&-0.1&0&0\\0&-1&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10\\110\\20\\150\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}C_t\\I_t\\T_t\\M_t\\Y_t\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-53.78&-1.777778&0.177778&-1.777778&-0.533333\\-7.278&-0.277778&0.027778&-0.277778&-0.383333\\-10.56&-0.555556&0.055556&-0.555556&-0.166667\\-8.278&-0.277778&-0.072222&-0.277778&-0.083333\\-52.78&-2.777778&0.277778&-2.777778&-0.833333\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10\\110\\20\\150\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}C_t\\I_t\\T_t\\M_t\\Y_t\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-167.5556\\-70.05556\\-46.11111\\-37.05556\\-230.5556\end{bmatrix}$$

ومنه يتضح بان القيم التنبؤية لكافة المتغيرات الداخلية مطابقة تماماً لما تم الحصول عليه سابقاً، أي إن:

$$C_t=167.5 \quad , \quad I_t=70 \quad , \quad T_t=46.1 \quad , \quad M_t=37 \quad , \quad Y_t=230.5$$



التماريـــــن

1

a- ماذا نقصد باختزال النماذج القياسية وكيف يتم الاختبار لتشخيصها؟

b- قارن بين اسلوب التقدير بطريقة (2SLS) وأسلوب التقدير بطريقة (IV) ، متى يتساوى التقدير بموجب هاتين الطريقتين.

2 اختزل النموذج الهيكلي التالي لكل متغير داخلي فيه

$$C_t = A_0 + A_1 Y_t + U_t$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + U_t$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث أن

C_t , I_t , Y_t متغيرات داخلية وتمثل الاستهلاك والاستثمار والدخل على التوالي . أما (G_t) فيمثل الانفاق الحكومي وهو متغير خارجي ، Y_{t-1} متغير داخلي مرتد زمنيا بسنة واحدة.ثم وضح العلاقة بين معالم النموذج الهيكلي ومعالم النموذج المختزل.

3 شخص كل علاقة من علاقات النموذج التالي:

$$P_t = \beta_1 W_t + \gamma_1 Q_t + \gamma_2 P_{t-1} + U_1$$

$$W_t = \beta_2 P_t + \beta_3 N_t + \gamma_3 S_t + \gamma_4 W_{t-1} + U_2$$

$$N_t = \beta_4 W_t + \gamma_5 S_t + \gamma_6 P_{t-1} + \gamma_7 W_{t-1} + U_3$$

هل نتيجة التشخيص أعلاه تتأثر إذا كانت

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_6 = \beta_2 = 0$$

4 اختزل النموذج التالي لكل من الاستهلاك (C_t) والاستثمار (I_t) والدخل القومي (Y_t)

$$C_t = \gamma_1 + \gamma_2 Y_t + U_t$$

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 \left(Y_t - Y_{t-1}\right) + U_t$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

حيث أن

C_t , I_t . Y_t متغيرات داخلية

Y_{t-1} متغير داخلي مرتد زمنيا

G_t متغير خارجي

ثم بين مدى التأثير الناتج من جراء تغير النفقات الحكومية (G_t) .

5 فرضا لديك منظومة المعادلات الانية التالية :

$$C_t = A_0 + A_1(Y_t - T_t) + U_1$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + U_2$$

$$T_t = Q\, Y_t$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

a- شخص كل علاقة من علاقات المنظومة أعلاه.

b- استخدام البيانات في الجدول أدناه لتطبيق طريقة (**OLS**) في تقدير معالم المنظومة ، وقارن النتيجة مع الاسلوب الملائم والمقترح نتيجة التشخيص الحاصل عليه من (**a**) أعلاه ، لتقدير معالم النموذج الهيكلي.

Gt	Yt-1	Tt	Yt	It	Gt
73.4	293.2	43.7	306.6	60.9	230.7
70.2	306.6	44.2	304.9	65.8	245.1
68.3	304.9	45.9	333.0	71.3	255.2
72.9	333.0	51.6	352.8	73.8	265.5
80.2	352.8	56.2	368.2	76.9	280.3
84.8	368.2	56.2	370.0	77.0	291.1
88.3	370.0	63.3	402.4	80.5	308.2
91.2	402.4	70.3	417.1	85.9	326.5
99.0	417.1	72.4	430.6	85.7	336.6
107.2	430.6	79.8	460.6	94.0	356.6
112.2	460.6	86.2	485.3	99.5	376.6
118.6	485.3	85.6	521.7	108.0	402.9
126.2	521.7	93.4	568.4	120.0	434.7
146.9	568.4	114.4	625.1	130.0	468.3
168.3	625.1	123.2	659.0	133.9	494.3
184.6	659.0	142.6	719.8	146.2	538.9

ملاحظة : البيانات أعلاه مقاسة بملايين الدنانير

6 لمنظومة المعادلات التالية:

$$y_{1t} = \beta_1 y_{2t} + \gamma_1 x_{1t} + U_{1t}$$

$$y_{2t} = \beta_2 y_{1t} + \gamma_2 x_{2t} + \gamma_3 x_{3t} + U_{2t}$$

حيث أن

y_{1t} , y_{2t} مقاسة بالانحرافات وتمثل متغيرات داخلية.

x_{1t} , x_{2t} , x_{3t} كذلك مقاسة بالانحرافات وتمثل متغيرات خارجية علما بأن المصفوفة التالية تمثل حاصل الضرب ومجموع المربعات لكافة متغيرات المنظومة.

المتغير	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3
y_1	**100**	**200**	**30**	**20**	**40**
y_2	**200**	**900**	**0**	**50**	**160**
x_1	**30**	**0**	**100**	**0**	**0**
x_2	**20**	**50**	**0**	**50**	**0**
x_3	**40**	**160**	**0**	**0**	**40**

a- أثبت نظريا بأن تقدير معالم المعادلة الثانية من منظومة المعادلات الانية أعلاه متطابق عند استخدام **(ILS)** أو **(2SLS)** أو **(IV)** .

b- لغرض التأكد من النتيجة في (أ) أعلاه ، استخدم البيانات الواردة في المصفوفة أعلاه لتقدير معالم المعادلة الثانية مستخدما

1- ILS , 2-2SLS , 3- IV

c- قارن التقديرات أعلاه مع تقديرات **(OLS)** لمعالم المعادلة الثانية.

7 منظومة معادلات آنية تتضمن ثلاث معادلات سلوكية ومتطابقة، تم تقدير معالمها الهيكلية وفق الاسلوب الملائم وحالة التشخيص، حيث كان الشكل الهيكلي التقديري لها كالاتي:

$$\hat{C}_t = 20 + 0.7(Y_t - T_t)$$

$$\hat{I}_t = 2 + 0.1Y_{t-1}$$

$$\hat{T}_t = 0.2Y_t$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

استخدم المنظومة اعلاه للتبؤ عن كل متغير داخلي فيها، اذا علمت بان المستوى المطلوب للمتغيرات الخارجية والمرتدة زمنيا كالآتي:

$Y_{t-1} = 100$ ، $G_t = 20$

أسئلة عامة محلولة

السؤال الأول:

لنموذج الانحدار التالي

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i$$

حيث إن:

$$\mu_i \sim N(0, \sigma_u^2) \quad E(\mu_i \mu_j) = 0, \forall \quad i \neq j$$

a- **أثبت أن تقديرات (OLS) غير متحيزة، أي إن** $E(b_0) = B_0, E(b_1) = B_1$

b- اشتق صيغة لتقدير تباين الميل (b_1)، أي إن $\text{var}(b_1)$

الحل :

a- صيغة تقدير الميل الحدي

$$b_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (Y_i - \overline{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$$

حيث إن $x_i = X_i - \overline{X}$, $y_i = Y_i - \overline{Y}$

$$\therefore b_1 = \sum w_i Y_i$$

حيث إن $w_i = {x_i}/{G}$, $G = \sum x_i^2$

بالتعويض $b_1 = \sum w_i (B_0 + B_1 X_i + \mu_i)$

$$= B_1 + \sum w_i \mu_i$$

حيث إن $\sum w_i X_i = 1$, $\sum w_i = 0$

$$\therefore E(b_1) = B_1 \Rightarrow E(u_i) = 0$$

وكذلك الحال بالنسبة للحد الثالث ، لدينا :

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X} = \overline{Y} - \overline{X} \sum w_i Y_i$$

$$= \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} w_i \right) Y_i = \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} w_i \right) (\beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i)$$

$$= \beta_0 + \sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} w_i \right) \mu_i$$

$$\therefore E(b_0) = \beta_0 \Rightarrow E(\mu_i) = 0$$

منه يتضح أن كلا من b_1 و b_0 تقديرات غير متحيزة.

b- من المعلوم بان تقدير الميل الحدي في يمثل هذا النموذج البسيط

$$b_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum w_i Y_i$$

في ضل نفس الفروض المذكورة في **(a)** أعلاه نحصل على:

$$b_1 - \beta_1 = \sum w_i \mu_i$$

$$\therefore \operatorname{var}(b_1) = E(b_1 - \beta_1)^2 = E\left[\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \mu_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} w_i w_j \mu_i \mu j\right]$$

$$= \sum w_i^2 E(\mu_i^2) = \sigma_u^2 \sum w_i^2 \qquad \Rightarrow \qquad E(\mu i \mu_j) = 0$$

بالتعويض نحصل على:

$$\operatorname{var}(b_1) = \sigma_u^2 / G^2 \sum x_i^2 = \sigma_u^2 / \sum x_i^2$$

علماً بان $E(S_e^2) = \sigma_u^2$

السؤال الثاني:

ناقش الصيغة المقدرة التالية مستعيناً بالنظرية الاقتصادية

$$\log \hat{Q}_t = 1.24 + 0.25 \log L_t + 0.78 \log K_t$$

حيث إن K_t, L_t, Q_t تمثل الإنتاج والعمل ورأس المال على التوالي

<u>**الحل:**</u>

الصيغة المقدرة، ما هي إلا عبارة عن صيغة دالة الإنتاج، والذي بموجبها يكون حجم الإنتاج دالة في العمل ورأس المال الثابت، وهي دالة خطية في اللوغاريتمات والتي تجب أن تحقق الشروط التالية:

$$Q_t = f(L_t, 0) = f(0, K_t) = 0$$

ومنها يستدل إن المرونة الإنتاجية بالنسبة إلى العمل تساوي 0.25 أي إن زيادة العمل بنسبة 100% تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنسبة 25%، أما مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال فتبلغ 0.78 أي إن زيادة رأس المال بنسبة 100% تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنسبة78% ، أما بالنسبة لغلة الحجم فإن :

$$\eta_L + \eta_K = 0.25 + 0.78 = 1.03 > 1$$

أي إن عائد الحجم للإنتاج متزايد، وهذا يعني إن زيادة كل من عنصري العمل ورأس المال بنسبة 100% سوف تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنسبة 103% .

السؤال الثالث:

لدراسة دالة الإنفاق على المواد الغذائية، أخذت عينة عشوائية ذات حجم ست أسر، وأعتمد لوغاريتم الإنفاق على المواد الغذائية كمتغير معتمد (Y_t) وعلاقته بلوغاريتم الدخل المتاح (X_{1t}) ولوغاريتم سعر المواد الغذائية (X_{2t}) كمتغيرات مستقلة وكانت الصيغة المقدرة كالآتي:

$$\hat{Y}_t = 4.82 + 0.85 X_{1t} - 0.71 X_{2t}$$

ناقش الصيغة المقدرة أعلاه مستعيناً بالنظرية الاقتصادية.

<u>الحل:</u>

الصيغة المقدرة، هي صيغة الاستهلاك، حيث إن الاستهلاك من أي سلعة ما هي الا عبارة عن دالة في الدخل وسعر تلك السلعة، وهي دالة خطية في اللوغاريتمات، عليه فإن التقديرين b_2 , b_1 تمثلان المرونة الانفاقية والمرونة السعرية على التوالي، ومنها يستدل، على إن المرونة الإنفاقية بالنسبة للدخل تساوي 0.85 أي إن زيادة الدخل 100% تؤدي إلى زيادة الاستهلاك بنسبة 85% ، أما المرونة السعرية فتساوي (0.71-) وقد ظهرت بإشارة سالبة وهذا يتفق والمنطق الاقتصادي لنظرية سلوك المستهلك .

السؤال الرابع:

المتغير العشوائي (Y_i) يرتبط بالمتغيرات المستقلة (X_{ij}) على وفق النموذج الخطي العام التالي:

$$Y = X\beta + \mu$$

حيث إن: $\mu \sim N(0, \sigma_u^2 I_n), E(\mu_i \mu_j) = 0, \forall \quad i \neq j$

علماً بان مصفوفة المعلومات كالآتي:

$$n = 6 \qquad \sum Y_i^2 = 42 \quad ، \quad X'Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix} \quad , \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.15 & -0.07 \\ & 0.32 & -0.45 \\ & & 0.55 \end{bmatrix}$$

a- اشتق صيغة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لتقدير موجه β ، ثم احسبه من واقع البيانات أعلاه .

b- قدر تباين العينة (S_e^2) ثم احسب مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجه المعالم المقدرة .

الحل:

-a

$$Y = X\beta + \mu$$
$$\mu = Y - X\beta$$
$$\mu'\mu = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$
$$= Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$
$$\therefore \frac{\partial \mu'\mu}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'Xb = 0$$
$$\therefore X'X = X'Y$$
$$\therefore b = (X'X)^{-1} X'Y$$

من واقع البيانات نحصل على:

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.15 & -0.07 \\ & 0.32 & -0.45 \\ & & 0.55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.82 \\ -4.71 \\ 2.77 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 4.82 - 4.71X_{1i} + 2.77X_{2i}$$

-b

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.82 \\ -4.71 \\ 2.77 \end{bmatrix}$$

$$S_e^2 = \frac{Y'Y - b'X'Y}{n-k-1} = \frac{42 - \begin{bmatrix} 4.82 & -4.71 & 2.77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}}{6-2-1} = \frac{10.72}{3}$$

$$\therefore S_e^2 = 3.6$$

$$\therefore \text{var}-\text{cov}(b) = S_e^2 (X'X)^{-1}$$

$$= 3.6 \begin{bmatrix} 0.86 & -0.15 & -0.07 \\ & 0.32 & -0.45 \\ & & 0.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1012 & -0.5409 & -0.0613 \\ & 1.1539 & -1.2270 \\ & & 1.9833 \end{bmatrix}$$

$$\text{var}(b_0) = 3.1012 \text{ , var}(b_1) = 1.1539 \text{ , var}(b_2) = 1.9833 \text{ , cov}(b_0 b_1) = -0.5409$$
$$\text{cov}(b_0 b_2) = -0.0613 \text{ , cov}(b_1 b_2) = -1.2270$$

السؤال الخامس:

ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ العشوائي في نموذج انحدار بسيط؟ ، اشرح معنى كل فرض منها ؟

الحل:

الخطأ العشوائي في نموذج انحدار بسيط هو (μ_i)

في النموذج التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i$$

i. μ_i متغير عشوائي- إي إن كل قيمة من قيم (μ_i) وفي أي فترة زمنية تعتمد على الصدفة.

ii. $E(\mu_i) = 0$ ، أي إن كل قيمة من قيم المتغير المستقل سوف تأخذ قيماً مقابلة ل (μ_i) وإن حاصل جمع هذه القيم يكون مساوياً للصفر، وعليه يمكن القول بأن: $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$

iii. $\text{var}(\mu_i) = \sigma_u^2$ ، أي إن تباين قيم (μ_i) حول متوسطها يكون ثابتاً في كل فترة زمنية بالنسبة لجميع قيم المتغير المستقل (X_i) وعدم تحقق هذا الغرض يؤدي إلى نشوء مشكلة عدم تجانس التباين.

iv. (μ_i) يتوزع توزيعاً طبيعياً، أي إن توزيع (μ_i) حول متوسطها المساوي للصفر يكون متماثلاً عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل (X_i)

v. $E(\mu_i \mu_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ ، أي إن الأخطاء المتعاقبة غير مرتبطة بعضها مع البعض الأخر وعدم هذا الغرض يؤدي إلى نشوء مشكلة الارتباط الذاتي.

vi. $E(\mu_i X_i) = 0$ ، أي ان قيم (μ_i) غير مرتبطة بأي من المتغيرات المستقلة ، ويعرف هذا الغرض بفرض التقديرعلى وفق المعادلة المنفردة ، وعدم تحقيقه يستوجب الانتقال الى حالة منظومة المعادلات الآنية .

وبشكل مختصر يمكن وضع الفروض أعلاه كالآتي:

$$\mu_i \sim N(0, \sigma_u^2) \quad , \quad E(\mu_i \mu_j) = 0 \;\forall\; i \neq j$$

$$E(\mu_i X_i) = 0 \quad , \quad i, j = 1,2,............,n$$

السؤال السادس:

لنفترض إن باحثاً قدر العلاقة بين المتغير المعتمد (Y_i) والمتغيرات المستقلة (X_{1i}) و (X_{2i}) وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_i = -49.329 + 1.364 X_{1i} + 0.114 X_{2i}$$

علماً بأن
$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = 1260.89 \, , \, R^2 = 0.94 \, , \, n = 9$$

ضع جدول تحليل التباين (ANOVA) مستعيناً بمعامل التحديد (R^2) واختبر الأثر الإجمالي للعلاقة المقدرة مستخدما F(6, 2, 0.5) =5.14 .

<u>الحل:</u>

بناء جدول تحليل التباين بدلالة معامل التحديد

الانحرافات الموضحة
$$R^3 \sum Y_i^2 = (1260.89)(0.94) = 1184.4$$

الانحرافات غير الموضحة
$$(1 - R^2) \sum Y_i^2 = (0.06)(1260.89) = 75.65$$

ANOVA - table

المصدر S or V	SS	d.f	MSS	F-test
الانحرافات الموضحة	1184.4	2	592.2	$F = \frac{592.2}{12.61} = 29.96$
الانحرافات غير الموضحة	75.65	6	12.61	
الانحرافات الكلية	1260.89	8		

بمقارنة قيمة (F) العملية مع القيمة الجدولية المعطاة ، يتضح بان العلاقة الخطية المدروسة معنوية وهناك على الأقل تأثير من أحد المتغيرين X_{1i} و X_{2i} على المتغير المعتمد (Y_i) .

السؤال السابع:

باحث اقتصادي استخدم أسلوب (OLS) لتقدير دالة الاستيرادات التالية:

$$\hat{Y}_t = -2461 + 0.28X_t \qquad R^2 = 0.98$$

ومن الانحرافات $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ وجد ان:

$$\sum_{t=2}^{20}(e_t - e_{t-1})^2 = 537192 \quad , \quad \sum_{t=1}^{20} e_t^2 = 573069$$

أحسب إحصاءة ديربن-واتسن (D.W) وأختبر وجود مشكلة الارتباط الذاتي . استخدم (5%) مستوى دلالة لقيمة عليا ودنيا مساوية الى $d_u = 1.41 \quad , \quad d_L = 1.20$

الحل:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{20}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{20} e_t^2} = \frac{537192}{573069} = 0.937$$

ثم نضع الفرضية التالية:

$$H_0 : p = 0 \quad \vee \quad H_1 : p \neq 0$$

وبالمقارنة مع القيمة العليا والدنيا المعطاة تجد ان:

$0.937 < 1.20$ أي إن $D.W < d_L$

عندها ترفض (H_0) وتقبل (H_1)، أي إن هناك ارتباط ذاتي موجب في دالة الاستيرادات.

السؤال الثامن:

لمنظومة المعادلات الآنية التالية:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \mu_{1t}$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \mu_{2t}$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

شخص دالة الاستهلاك (C_t) ودالة الاستثمار (I_t) في المنظومة أعلاه.

الحل:

أولاً: تشخيص دالة الاستهلاك

شرط الترتيب $k - m \geq G - 1$

$$k = 5 \quad , \quad m = 2 \quad , \quad G = 3$$

$$\therefore 5 - 2 \ ? \ 3 - 1 \qquad \therefore 3 > 2$$

دالة الاستهلاك فوق التشخيص.

أما شرط الرتبة فإنه يستوجب وضع الجدول التالي:

المعادلة	1	C_t	Y_t	I_t	Y_{t-1}	G_t
1	α_0	-1	α_1	0	0	0
2	β_0	0	β_1	-1	β_2	0
3	0	1	-1	1	0	1

بالنسبة لدالة الاستهلاك $\begin{bmatrix} -1 & \beta_2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

قيمة محدد جزئي لا تساوي صفر عندها تكون الدالة مشخصة بشكل نهائي.

$$\begin{vmatrix} -1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq zero$$

ثانياً: تشخيص دالة الاستثمار

شرط الترتيب $\quad k - m \geq G - 1$

$$k = 5\ ,\ m = 3\ ,\ G = 3$$

$$5 - 3 \quad ? \quad 3 - 1$$

$$\therefore 2 = 2$$

إذن دالة الاستثمار مشخصة تماماً

عليه فإن دالة الاستثمار $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ حيث محدد هذه المصفوفة لا يساوي صفر ، وبالتالي فإن الدالة مشخصة بشكل نهائي.

السؤال التاسع:

ما هو المقصود بمشكلة التعدد الخطي (Multicollinearity) ، **موضحاً** عواقب هذه المشكلة وكيفية الاختبار لوجودها.

الحل:

تحدث مشكلة التعدد الخطي في حالة وجود فرض التجانس ، أو عدم التجانس ، وفي حالة وجود أو عدم وجود حالة الارتباط الذاتي ، وان الغرض الخاص بهذه المشكلة يمكن وضعه كالآتي:

((أن لا توجد علاقة خطية تامة أو شبه تامة بين أي من المتغيرات المستقلة))

في حالة التعدد الخطي التام، يكون محدد مصفوفة المعلومات مساوياً الى الصفر ، أي إن $|X'X| = 0$ ويترتب على ذلك ان يكون التقدير للمعالم كمية غير محددة أي إن:

$$b = \frac{adj(X'X)}{|X'X|} . X'Y = \underset{0.0}{\overset{0.0}{\rightarrow}}$$ كمية غير محددة

ونتيجة لذلك سوف يكون تباين هذه المعالم المقدرة مساوياً إلى ما لانهاية، أي إن:

$$\text{var}-\text{cov}(b) = \frac{adj(X'X)}{(X'X)} = \infty$$

أما في حالة التعدد الخطي شبه التام، يكون محدد مصفوفة المعلومات صغير جداً أي إن، كمية صغيرة جداً = $|X'X|$ ويترتب على ذلك أن يكون تباين المعالم المقدرة كبير جداً أي إن:

$$\text{var}-\text{cov}(b) = \frac{adj(X'X)}{|X'X|} =$$ مقدار كبير جداً

وبالتالي قد يستنتج خطأ بان هذه المتغيرات المستقلة غير مهمة، من أهم الاختبارات لوجود مشكلة التعدد الخطي، هو اختبار **كلاين** المعتمد على الارتباطات البسيطة بين المتغيرات المستقلة وكذلك اختبار **فراير-كلوبر** المستند على احصاءة (χ^2) وكالآتي:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5)\right] len|D|$$

حيث إن:

k تمثل عدد المتغيرات المستقلة، n تمثل حجم العينة، وأن:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

وبذلك نقارن قيمة (χ^2) العملية مع نظريتها الجدولية بدرجة حرية مساوية إلى $\frac{k(k-1)}{2}$ ومستوى دلالة معين.

السؤال العاشر:

فرض باحثٌ قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_t = 21.5 + 0.84 X_t \quad , \quad n = 12$$
$$S.E \quad (9.4) \quad (0.024) \quad , \quad R^2 = 0.96$$

حيث إن الأرقام بين قوسين تشير إلى الانحراف المعياري للمعالم المقدرة.

اختبر مدى معنوية المعالم المقدرة، مستخدماً $t(10\,,\,0.05)$ مساوية إلى 2.23 .

الحل:

صيغة اختبار المعالم المقدرة في نموذج الانحدار هي:

$$t = \frac{b_j}{S.E(b_j)} \quad wher \quad j = 0,1$$

أولاً: اختبار معنوية الحد الثابت

$$H_0 : b_0 = 0 \qquad \vee \qquad H_1 : b_0 \neq 0$$

$$\therefore t = \frac{21.5}{9.4} = 2.29$$

ثانياً: اختبار معنوية الميل الحدي

$$H_0 : b_1 = 0 \quad \vee \quad H_1 : b_1 \neq 0$$

$$t = \frac{0.84}{0.024} = 35$$

وبمقارنة قيمة (t) العملية مع القيم الجدولية المعطاة يتضح ولكلا الحاتين:

(t) الجدولية < (t) العملية

عليه نرفض فرضية العدم (H_0) ونأخذ بالغرض البديل (H_1) ولكلا الحالتين وهذا بدوره يدل على إن كل من الحد الثابت والميل الحدي لدالة الاستهلاك معنوية.

السؤال الحادي عشر:

المتغير المعتمد (Y_i) يرتبط بالمتغير المستقل (X_i) على وفق النموذج التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i$$

$$\mu_i \sim N(0, \sigma_u^2) \quad , \quad E(\mu_i \mu_j) = 0 \quad \forall \quad i \neq j$$

في ضوء المشاهدات التالية:

$$Y_i = 0, -1 , 0 , 0$$

$$X_i = 0 , 0 , 0 , 1$$

ضع هذه الحالة بهيئة النموذج الخطي العام, ثم قدر موجه (b).

الحل:

هيئة النموذج الخطي العام GLM

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

$$Y \quad = \quad X \quad \beta \quad + \quad \mu$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\therefore \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

الصيغة التقديرية $\therefore Y_i = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} X_i$

السؤال الثاني عشر:

فرض باحث قدر العلاقة بين المتغير المعتمد (Y_t) والمتغير المستقل (X_t) وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_t = 6.65 + 2.75 X_t$$

مع المعلومات التالية:

$$D.W = 0.823 \quad , \quad \sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} = 110.29 \quad , \quad \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 = 185.677$$

قدر معامل الارتباط الذاتي $(\hat{\rho})$ ، وضع الخطوات اللازمة لمعالجة هذه المشكلة ف الجانب التطبيقي.

الحل:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2} = \frac{110.29}{185.677} = 0.59$$

وهو ارتباط ذاتي موجب.

ولغرض استبعاد أثر وجود الارتباط الذاتي، لا بد من تنقية مشاهدات المتغير المعتمد والمتغير المستقل وكالآتي:

$$Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1} = Y_t - 0.59Y_{t-1} = Y_t^*$$

$$X_t - \hat{\rho}X_{t-1} = X_t - 0.59X_{t-1} = X_t^*$$

ثم بعد ذلك نقدر معالم العلاقة الخطية بين Y_t^* و X_t^2 مستخدمين اسلوب ((GLS)) مباشرة على بيانات العينة، وهنا يجب تحديد مصفوفة $\left(\Omega^{-1}\right)$ في الصيغة العامة التالية:

$$b_{GLS} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y$$

حيث إن:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \rho^2 & \cdots & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

السؤال الثالث عشر:

لمنظومة المعادلات الآنية التالية:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \mu_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

أوجد الصيغة المختزلة للمتغير $\left(C_t\right)$، و$\left(Y_t\right)$ علماً بأن $\left(I_t\right)$ متغير خارجي وأن $\left(Y_{t-1}\right)$ متغير داخلي مرتد زمنياً.

الحل:

الصيغة المختزلة للمتغير $\left(C_t\right)$ ، في المنظومة كالآتي:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1\left(C_t + I_t\right) + \beta_2 Y_{t-1} + \mu_t$$

$$\therefore C_t - \beta_1 C_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + \beta_2 Y_{t-1} + \mu_t$$

$$\therefore C_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{\beta_1}{1-\beta_1} I_t + \frac{\beta_2}{1-\beta_1} Y_{t-1} + \frac{\mu_t}{1-\beta_1}$$

في حين الصيغة المختزلة للمتغير (Y_t) كالآتي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \mu_t + I_t$$

$$\therefore Y_t - \beta_1 Y_t = \beta_0 + \beta_2 Y_{t-1} + \mu_t + I_t$$

$$\therefore Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{\beta_2}{1-\beta_1} Y_{t-1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{\mu_t}{1-\beta_1}$$

من الصيغتين المختزلتين أعلاه يتضح بإن كل من المتغيرين الداخليين ، أصبح الآن بدلالة المتغيرات الخارجية والمرتدة زمنياً.

السؤال الرابع عشر

لعينة عشوائية ذات حجم n=3 مشاهدات ولنموذج خطي بسيط

$(y_t=\beta_0 + \beta_1 X_t + \mu_t)$، حيث أن $\mu_t = \rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t$ علماً بأن

$E(\Sigma_t \Sigma_{t'})= 0 \ \forall \ t \neq t'$ ، $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2_\Sigma)$ ، اثبت ان

1. $b_{GLS} = b_{2SP}$.

2. $\sigma_u^2 \left(1-\rho^2\right)\left(X^{*'} X^*\right)^{-1} = \sigma_u^2 \left(X'\Omega^{-1} X\right)^{-1}$

علماً بان $X^*=TX$، $Y^*=TY$

الحل:

.1

$b_{GLS} = b_{2SP}$

$$\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y = \left(X^{*'}X^*\right)^{-1} X^*Y^*$$

$$= \left[(TX)'(TX)\right]^{-1}(TX)'(TY)$$

$$= \left(X'T'TX\right)^{-1} X'T'TY$$

وبما ان (T) لحجم عينة n=3

$$T=\begin{bmatrix}\sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0\\ -\rho & 1 & 0\\ 0 & -\rho & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore T'=\begin{bmatrix}\sqrt{1-\rho^2} & -\rho & 0\\ 0 & 1 & -\rho\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore T'T=\begin{bmatrix}1-\rho^2+\rho^2+0 & -\rho & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho\\ 0 & -\rho & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\rho & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho\\ 0 & -\rho & 1\end{bmatrix}$$

وبالضرب والقسمة بالمقدار $(1-\rho^2)$

$$\therefore T'T=\left(1-\rho^2\right)\Omega^{-1}\Rightarrow\Omega^{-1}=\frac{T'T}{1-\rho^2}$$

بالتعويض في الصيغة الحاصل عليها

$$\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}Y=\left[X'\left(1-\rho^2\right)\Omega^{-1}X\right]^{-1}X'\left(1-\rho^2\right)\Omega^{-1}Y$$

$$=\frac{\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\left(1-\rho^2\right)\Omega^{-1}Y}{\left(1-\rho^2\right)}$$

$$\therefore\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}Y=\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}Y\longrightarrow$$ وهـم

2. وكذلك الحال بالنسبة لتباين المعالم

$$\sigma_u^2\left(1-\rho^2\right)\left(X^{*\prime}X^*\right)^{-1}=\sigma_u^2\left(1-\rho^2\right)\left[(TX)'(TX)\right]^{-1}$$

$$=\sigma_u^2\left(1-\rho^2\right)\left(X'T'TX\right)^{-1}$$

وبالتعويض عن قيمة $(T'T)$ بما تساويها نحصل على

$$=\sigma_u^2\left(1-\rho^2\right)\left[X'\left(1-\rho^2\right)\Omega^{-1}X\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sigma_u^2\left(1-\rho^2\right)}{1-\rho^2}\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}$$

$$=\sigma_u^2\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}\longrightarrow$$ وهـم

السؤال الخامس عشر

عرف اثنان مما يأتي

1- المعادلة المنفردة ومنظومة المعادلات الآنية.

2- الصيغة الهيكلية والصيغة المختزلة.

3- المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية.

موضحا جوابك من خلال مثال بسيط

الحل:-

المعادلة المنفردة تعني نموذج انحدار سواء كان بسيط او عام والذي يفترض بموجبه، ان يكون هناك اتجاها وحيداً للسببية، بمعنى ان مجموعة المتغيرات المستقله تؤثر في المتغير المعتمد ولا تتأثر به في حين الحالة العامة لمعظم الظواهر تنطوي على الاعتماد المتبادل بين المتغيرات الداخلة في النموذج، أي انها تؤثر وتتأثر ببعضها البعض.

بشكل عام يمكن تعريف منظومة المعادلات الانية، بأنها مجموعة من المعادلات، وفيها يمكن ان يكون المتغير المعتمد لواحد او اكثر من معادلاتها متغيراً مستقلاً في معادلة او اكثر من معادلة ضمن المنظومة.

تعرف المتغيرات المعتمدة في منظومة المعادلات الانية بالمتغيرات الداخلية، حيث يقابل كل متغير داخلي في المنظومة معادلة واحدة، وبهذا فان عدد المعادلات في المنظومة يكون مساوي لعدد المتغيرات الداخلية. اما فيما يتعلق بالمتغيرات الخارجية فإن عددها لا يتحدد بعدد المتغيرات الداخلية، وأنما يتوقف ذلك على طبيعة العلاقة بين مختلف معادلات المنظومة.

لتعريف الصيغة الهيكلية والصيغة المختزلة، ضمن خلال المنظومة البسيطة المتكونة من معادلة واحدة ومتطابقة.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \mu_t$$

$$X_t = Y_t + I_t$$

المعادلتين اعلاه يمثلان الصيغة الهيكلية، حيث ان كل معادلة في الصيغة الهيكلية تعبر عن احد المتغيرات الداخلية بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية وكذلك المتغيرات الداخلية المرتدة زمنياً ان وجدت، في حيk الصيغة المختزلة ما هي الاعبارة عن التعبير عن كل متغير داخلي في المنظومة بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيا وللمنظومة اعلاه تكون الصيغة المختزلة للمتغير في (Y_t) و (X_t) كالتالي:

$$X_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} \mu_t$$

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{\beta_1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} u_t$$

السؤال السادس عشر

شخص كل معادلة في معادلات المنظومة التالية

$Y_1 = 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + \mu_1$

$Y_2 = Y_3 + X_3 + \mu_2$

$Y_3 = Y_1 - Y_2 - 2X_3 + \mu_3$

علماً بأن:

Y_1، Y_2، Y_3 متغيرات داخلية

X_1، X_2، X_3 متغيرات خارجية

الحل:-

لغرض تشخيص كل معادلة من معادلات المنظومة، تعيد كتابتها وذلك من خلال وضع كافة معالمها بدلالة المتغيرات كافة في المنظومة:

المتغيرات X_3	X_2	X_1	Y_3	Y_2	Y_1	المعادلة
0	1	-2	0	3	-1	1
1	0	0	1	-1	0	2
-2	0	0	-1	-1	1	3

أولاً: اختيار شرط الترتيب

$K - M \geq G - 1$

حيث ان: $K = 6$ $G = 3$

بالنسبة للمعادلة الاولى

2 = 2 المعادلة مشخصة تماماً

بالنسبة للمعادلة الثانية

2 > 3 المعادلة فوق التشخيص
بالنسبة للمعادلة الثالثة
2 = 2 المعادلة مشخصة تماماً

ثانياً: اختيار شرط الرتبة
بالنسبة للمعادلة الاولى

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

محدد المصفوفة اعلاه مساوي الى (1-) اذاً، المعادلة مشخصة بشكل نهائي
بالنسبة الى المعادلة الثانية

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بما ان المصفوفة اعلاه غير مربعة، اذاً يجب تجزيئها، وبإيجاد قيم محددات المصفوفات المجزئة، على الاقل احدها لا يساوي صفر، تكون المعادلة مشخصة بشكل نهائي:
بالنسبة للمعادة الثالثة:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبما ان محدد المصفوفة أعلاه يساوي صفر، اذاً المعادلة غير مشخصة.

السؤال السابع عشر

المتغير العشوائي (Y_i) يرتبط بالمتغير المستقل (X_i) على وفق النموذج الخطي التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i$$

$$\mu_i \sim N(0, \sigma_u^2),\ E(\mu_i \mu_j) = 0 \ \forall\ i \neq j$$

مع المشاهدات التالية

$Y_i = Y_1$ ، Y_2 ، Y_3 ، Y_4
$Xi = 0,\ 0,\ 0,\ 1$

ضع هذه الحالة بهيئة النموذج الخطي العام (GLM) واحسب مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجة المعالم (b)، مستخدماً تباين عينة مساوياً الى S_e^2 2.25 =

الحل:-

هيئة النموذج العام

$$Y = X\beta + \mu$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة التباين والتباين المشترك

$$\text{Var-Cov}(b)_{LS} = S_e^2 (X'X)^{-1}$$

$$= 2.25 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = 2.25 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.75 \\ -0.75 & 3 \end{bmatrix}$$

$Var(b_0) = 0.75$, $Var(b_1) = 3$, $Cov(b_0 b_1) = -0.75$

السؤال الثامن عشر

لمنظومة المعادلات الآنية التالية:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \mu_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

حيث ان:

Y_t ,C_t متغيرات داخلية Endogenous Variables

I_t متغير خارجي Exogenous Variables

Y_{t-1} متغير داخلي مرتد زمنياً Logged Endogenous Variables

شخص دالة الاستهلاك (C_t) في المنظومة اعلاه.

الحل:

لتشخيص دالة الاستهلاك، يجب دمج المتغيرات الداخلية والخارجية والمتغيرات المرتدة زمنيا وكما في الجدول التالي:

المعادلة	1	C_t	Y_t	I_t	Y_{t-1}
(1)	B_0	-1	B_1	0	B_2
(2)	0	1	-1	1	0

$$K - M \geq G - 1$$

$$4 - 3 = 2 - 1 \Rightarrow 1 = 1$$

اذا المعادلة مشخصة تماما.

السؤال التاسع عشر

فرضاً ان المتغير المستقل (X_i) في النموذج التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i$$

أخذ المشاهدات التالية

X_i= 2, 3, 5, 7, 9

علماً بان تباين الخطأ في النموذج اعلاه، يتناسب طردياً مع مربع قيم (X_i) أي ان

$$\mu_i \sim N(0, \sigma_u^2 X_i^2),\ E(\mu_i \mu_j) = 0\ \forall\ i \neq j$$

قدر مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعالم النموذج مستخدماً $S_e^2 = 0.5$.

$$\text{Var-Cav}(b)_{WLS} = S_e^2 (X' W^{-1} X)^{-1}$$

$$= S_e^2 \begin{bmatrix} \Sigma W_i & \Sigma W_i X_i \\ \Sigma X_i W_i & \Sigma X_i^2 W_i \end{bmatrix}^{-1}$$

وبما ان

$$W_i = \frac{1}{X_i^2}$$

$$\therefore \text{ Var-Cav(b)}_{WLS} = S_e^2 \begin{bmatrix} \Sigma \frac{1}{X_i^2} & \Sigma \frac{1}{W_i} \\ \Sigma \frac{1}{W_i} & n \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{0.5}{0.5116} \begin{bmatrix} 5 & -1.28 \\ -1.28 & 0.43 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Var(b_0) = 4.886, Var(b_1) = 0.421, Cov(b_0b_1) = -0.64

السؤال العشرون

عينة عشوائية ذات اربع مشاهدات، n=4، اخذ فيها كل من المتغير المعتمد والمتغير المستقل المشاهدات التالية:

Y_t = 0, -1, 0, 0

X_t = 0, 0, 0, 1

قدر معالم النموذج الخطي التالي

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \mu_t$$

$\mu_t \sim N(0, 2.25\,\Omega)$ $\hat{\rho} = 0.9$

علماً بان (μ_t) يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى، مستخدماً اولاً اسلوب (GLS) واسلوب (2SP) ثانياً:

الحل:

$$b_{GLS} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{GLS} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{،}\ Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{،}\ \Omega^{-1} = \frac{1}{0.19} \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1.81 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 & 1.81 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} = \frac{0.19}{7.41} \begin{bmatrix} 1 & -1.9 \\ -1.9 & 11.02 \end{bmatrix}$$

$$X'\Omega^{-1}Y = \frac{1}{0-19}\begin{bmatrix}-3.61\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{GLS} = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}Y = \begin{bmatrix}-0.487\\0.9256\end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_t = -0.487 + 0.9256\,X_t$$

في حين تطبيق اسلوب (2SP) يتطلب تحديد مصفوفة (T) والتي تكون في هذا السؤال ذات بعد (4x4) وكالأتي:

$$T_{4\times4} = \begin{bmatrix}\sqrt{1-\hat{\rho}^2} & 0 & 0 & 0\\ -\hat{\rho} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\hat{\rho} & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\hat{\rho} & 1\end{bmatrix}$$

$$T_{4\times4} = \begin{bmatrix}0.44 & 0 & 0 & 0\\ 0.9 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0.9 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.9 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ Ty = Y^* = \begin{bmatrix}0\\-1\\-0.9\\0\end{bmatrix} ، Tx = X^* = \begin{bmatrix}0.44 & 0\\1.9 & 0\\1.9 & 0\\1.9 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore b_{2SP} = \begin{bmatrix}b_0\\b_1\end{bmatrix}_{2SP} = \left(X^{*'}X^*\right)^{-1}X^{*'}Y^*$$

$$= \begin{bmatrix}11.02 & 1.9\\1.9 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-3.61\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.487\\0.9256\end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_t = -\,0.487 + 0.9256\,X_t$$

ومنه يتضح ان

$b_{GLS} = b_{2SP}$

أي ان
$$\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}Y = \left(X^{*'}X^{*}\right)^{-1}X^{*'}Y^{*}$$

السؤال الحادي والعشرون

النموذج الانحدار الخطي العام التالي:

$Y= X\beta + \mu$

$\mu \sim N\left(0, \sigma_u^2 I_n\right)$ ،$E(\mu i\ \mu j)=0\ \forall\ i\neq j$

اثبت بان تقديرات (OLS) لموجة معالم النموذج اعلاة، افضل تقدير خطي غير متميز (BLUE)

<u>الحـل:</u>

لاثبات هذه الخاصية يجب تحقق الشروط التالية:

a- خاصية الخطية، حيث ان المقدر (b) دالة خطية في مشاهدات المتغير (Y) أي ان:

$b_{LS} = (X'X)^{-1} XY \Longrightarrow$ Linear combination

b- تقدير غير متحيز

$b_{LS} = (X'X)^{-1}X' (X\beta+\mu)$

$\therefore\ E(b_{LS}) = \beta \Longrightarrow$ Unbiased

c- هذا المقدر يمتلك اقل تباين، حيث ان

$b - \beta = (X'X)^{-1}X'\mu$

$\therefore$ Var-Cor(b) = $\sigma_u^2 (X'X)^{-1}$

بتطبيق نظرية كرامير- راو، يمكن اثبات خاصية (BLUE).

$$L(\beta,\sigma_u^2,Y_i) = \left(2\pi\sigma_u^2\right)^{\frac{-n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2}(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}$$

$$\therefore\ \ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma_u^2) - \frac{1}{2\sigma_u^2}(Y-X\beta)'(Y-X\beta)$$

$$\therefore\ G.RL.b = \frac{1}{\begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\sigma_u^2}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma_u^2\partial\beta'}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2\sigma_u^2}\right) \end{bmatrix}}$$

$$G.RL.b = \frac{1}{\begin{bmatrix} \frac{(X'X)}{\sigma_u^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma_u^4} \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_u^2 (X'X)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_u^2}{n} \end{bmatrix}$$

وبمقارنة مصفوفة تباين موجة المعالم المقدر بموجب اسلوب (OLS) مع مصفوفة التباين الحاصل عليها وفق صيغة كرامير-راو، نجد هاتين الصفتين متطابقتين ومساوية الى:

$$Var\text{-}Cor(b) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

وبالتالي يستنتج بأن موجة المعالم المقدر (b_{LS}) يمتلك خاصية افضل تقدير حتى غير متميز (BLUE).

السؤال الثاني والعشرون

للنموذج الخطي العام التالي:

$$Y = X\beta + \mu$$

حيث ان: $\mu \sim N(0, \sigma_u^2 \Omega)$

علماً بان: $\mu_t = \rho\, \mu_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\Sigma_t \sim N(0, \sigma_u^2\, \varepsilon_t)\ ،\ E(\varepsilon_t\, \varepsilon_s) = 0\ \forall\ t \neq s$$

في ظل الفروض اعلاه، ولعينة عشوائية ذات حجم (n) اشتق عناصر مصفوفة (Ω).

الحل:-

بما ان μ_t يتبع الارتباط الذاتي في الدرجة الاولى، أي ان

$$\mu_t = \rho\, \mu_{t-1} + \varepsilon_t$$

وكذلك

$$\mu_{t-1} = \rho\, \mu_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

بالتعويض

$$\mu_t = \rho^2 \mu_{t-2} + \rho\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

وكذلك لدينا

$$\mu_{t-2} = \rho\, \mu_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$

بالتعويض مرة اخرى

$$\therefore\ \mu_t = \rho^3 \mu_{t-3} + \rho^2\, \varepsilon_{t-2} + \rho\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

وهكذا بالتعويض المتسلسل نحصل على

$$\mu_t = \varepsilon_t + \rho\, \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \mu_{t-2} + \rho^3 \mu_{t-3} + \ldots..$$

ويأخذ التباين للعينة اعلاه

$$\sigma_u^2 = \sigma_\Sigma^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots..)$$

$$\therefore \sigma_u^2 = \sigma_\Sigma^2 / 1 - \rho^2$$

اما التباين المشترك بين μ_t و μ_{t-1}، أي بين

$$\mu_t = \varepsilon_t + \rho\, \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \mu_{t-2} + \ldots.$$

$$\mu_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \rho\, \varepsilon_{t-2} + \rho^2 \mu_{t-3} + \ldots.$$

$$\therefore\ E(\mu_t\, \mu_{t-1}) = \rho\, \sigma_\Sigma^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots.)$$

$$\therefore\ E(\mu_t\, \mu_{t-1}) = \rho\, \sigma_\Sigma^2 / 1 - \rho^2$$

وبمقارنة النتيجتين نحصل على

$$E(\mu_t\, \mu_{t-1}) = \rho\, \sigma_u^2$$

والعلاقة اعلاه يمكن ان توضع بشكل عام

$$E(\mu_t\, \mu_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2 \text{ ، } s = 0,1,2,\ldots, n-1$$

ففي الحالة التي تكون فيها $S = 0$

$$E(\mu_{t+}\, \mu_{t-s}) = E(\mu_t^2) = \sigma_u^2$$

s= 1

$$E(\mu_t\, \mu_{t-1}) = \rho\, \sigma_u^2$$

s= 2

$$E(\mu_t\, \mu_{t-2}) = \rho^2\, \sigma_u^2$$

$$\vdots$$

وهكذا

$$E(\mu_t\, \mu_{t-(n-1)}) = \rho^{n-1}\, \sigma_u^2$$

وبجمع هذه الحدود في مصفوفة تباين الاخطاء في حالة GLM

$$E(\mu\mu') = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \rho\sigma_u^2 & \rho^2\sigma_u^2 & \cdot & \cdot & \rho^{n-1}\sigma_u^2 \\ & \sigma_u^2 & \rho\sigma_u^2 & \cdot & \cdot & \rho^{n-2}\sigma_u^2 \\ & \cdot & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

بشكل عام وبحجم عينة (n) يمكن كتابة مصفوفة (Ω) كالتالي:

$$E(\mu\mu') = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho^{n-1} \\ & 1 & \rho & \rho^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho^{n-2} \\ & \cdot & & & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & & & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \sigma_u^2\Omega$$

السؤال الثالث والعشرون

المتغير العشوائي (Y_t) يرتبط بالمتغير المستقل (X_t) على وفق المنوذج الخطي البسيط التالي:

$$Y_t = \beta_1 X_t + \mu_t$$

علماً بان (μ_t) يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى، حيث ان

$$\mu_t \sim N(0, \sigma_u^2\Omega)$$

$$y_t = Y_t - \overline{Y}\text{،}\quad x_t = X_t - \overline{X}$$

استخدم عينة عشوائية ذات حجم ثلاث مشاهدات، n=3 لاثبات بأن كفاءة تقدير الميل الحدي (β_1) بطريقة (GLS) نسبة الى (OLS) مساوية الى

$$eff(b_1) = \frac{1}{\left(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4\right)}$$

الحل:

$$eff(b_1) = \frac{Var(b_1)inGLS}{Var(b_1)inOLS}$$

(في ظل وجود الارتباط الذاتي)

$$\therefore\ Var(b_1)_{GLS} = \sigma_u^2 (X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

$$\underset{3\times3}{\Omega}=\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2\\ \rho & 1 & \rho\\ \rho^2 & \rho & 1\end{bmatrix} \text{ ، } E(S_e^2)=\sigma_u^2$$

$$\therefore \underset{3\times3}{\Omega}^{-1}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}1 & -\rho & 0\\ -\rho & 1-\rho^2 & -\rho\\ 0 & -\rho & 1\end{bmatrix}$$

بالتعويض نحصل على

$$\text{Var}(b_1)_{GLS}= S_e^2(1-\rho^2)\left[X_1^2+X_2^2+X_3^2-2\rho(X_1X_2+X_2X_3)+\rho^2X_2^2\right]^{-1}$$

$$\therefore \text{Var}(b_1)_{GLS}= S_e^2(1-\rho^2)\left(\sum_{t=1}^{n}X_t^2-2\rho\sum_{t=1}^{n-1}X_tX_{t+1}+\rho^2\sum_{t=1}^{n-2}X_{t+1}^2\right) \text{.................. (1)}$$

في حين تباين (b_1) في حالة تطبيق (OLS) يعطي على وفق الصيغة التالية:

$$\text{Var}(b_1)_{LS}= \sigma_u^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$$

بالتعويض نحصل على:

$$\text{Var}(b_1)_{LS}= \frac{S_e^2}{\sum X_t^2}\left(X_1^2+\rho X_1X_2+\rho^2X_1X_3+\rho X_1X_2+X_2^2+\rho X_2X_3+\rho^2X_1X_3+\rho X_2X_3+X_3^2\right)\frac{1}{\sum x_t^2}$$

$$\text{Var}(b_1)_{LS}= \frac{S_e^2}{\sum X_t^2}\left(\sum_{t=1}^{n}X_t^2+2\rho\sum_{t=1}^{n-1}X_tX_{t+1}+2\rho^2\sum_{t=1}^{n-2}X_tX_{t+2}\right)\cdot\frac{1}{\sum X_t^2}$$

$$\text{Var}(b_1)_{LS}= \frac{S_e^2}{\sum X_t^2}\left(1+\frac{2\rho\sum_{t=1}^{n-1}X_tX_{t+1}}{\sum X_t^2}+\frac{2\rho^2\sum_{t=1}^{n-2}X_tX_{t+2}}{\sum X_t^2}\right) \text{.............................. (2)}$$

ويقسم (1) على (2) نحصل على:

$$eff(b_1)=\frac{(1-\rho^2)}{(1-\rho^2)(1+2\rho^2+2\rho^4)}=\frac{1}{(1+2\rho^2+2\rho^4)} \qquad <1$$

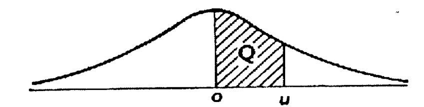
الجداول الاحصائية

1	المساحة تحت المنحني الطبيعي المعياري
2	توزيع (t)
3	توزيع (f) جانب واحد
4	توزيع (F) جانبين
5	توزيع ( )
6	قيم معامل سبيرمان لارتباط الرتب
7	المنحنى الطبيعي المعياري
8	معامل الارتباط (=0)
9	القيم الحرجة العليا والدنيا لاختبار ديربن- واتسون

جدول (1)

المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري

AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE

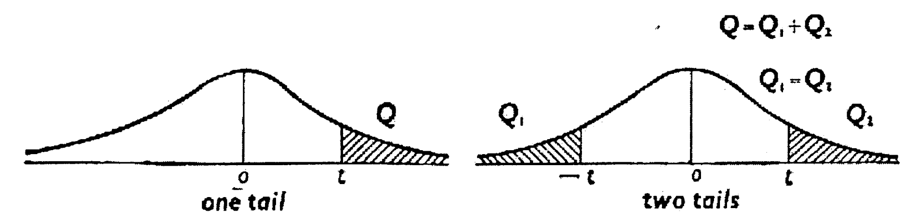


u	0·00	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06	0·07	0·08	0·09
0·0	0·0000	0·0040	0·0080	0·0120	0·0160	0·0199	0·0239	0·0279	0·0319	0·0359
0·1	0·0398	0·0438	0·0478	0·0517	0·0557	0·0596	0·0636	0·0675	0·0714	0·0753
0·2	0·0793	0·0832	0·0871	0·0910	0·0948	0·0987	0·1026	0·1064	0·1103	0·1141
0·3	0·1179	0·1217	0·1255	0·1293	0·1331	0·1368	0·1406	0·1443	0·1480	0·1517
0·4	0·1554	0·1591	0·1628	0·1664	0·1700	0·1736	0·1772	0·1808	0·1844	0·1879
0·5	0·1915	0·1950	0·1985	0·2019	0·2054	0·2088	0·2123	0·2157	0·2190	0·2224
0·6	0·2257	0·2291	0·2324	0·2357	0·2389	0·2422	0·2454	0·2486	0·2517	0·2549
0·7	0·2580	0·2611	0·2642	0·2673	0·2704	0·2734	0·2764	0·2794	0·2823	0·2852
0·8	0·2881	0·2910	0·2939	0·2967	0·2995	0·3023	0·3051	0·3078	0·3106	0·3133
0·9	0·3159	0·3186	0·3212	0·3238	0·3264	0·3289	0·3315	0·3340	0·3365	0·3389
1·0	0·3413	0·3438	0·3461	0·3485	0·3508	0·3531	0·3554	0·3577	0·3599	0·3621
1·1	0·3643	0·3665	0·3686	0·3708	0·3729	0·3749	0·3770	0·3790	0·3810	0·3830
1·2	0·3849	0·3869	0·3888	0·3907	0·3925	0·3944	0·3962	0·3980	0·3997	0·4015
1·3	0·4032	0·4049	0·4066	0·4082	0·4099	0·4115	0·4131	0·4147	0·4162	0·4177
1·4	0·4192	0·4207	0·4222	0·4236	0·4251	0·4265	0·4279	0·4292	0·4306	0·4319
1·5	0·4332	0·4345	0·4357	0·4370	0·4382	0·4394	0·4406	0·4418	0·4429	0·4441
1·6	0·4452	0·4463	0·4474	0·4484	0·4495	0·4505	0·4515	0·4525	0·4535	0·4545
1·7	0·4554	0·4564	0·4573	0·4582	0·4591	0·4599	0·4608	0·4616	0·4625	0·4633
1·8	0·4641	0·4649	0·4656	0·4664	0·4671	0·4678	0·4686	0·4693	0·4699	0·4706
1·9	0·4713	0·4719	0·4726	0·4732	0·4738	0·4744	0·4750	0·4756	0·4761	0·4767
2·0	0·4772	0·4778	0·4783	0·4788	0·4793	0·4798	0·4803	0·4808	0·4812	0·4817
2·1	0·4821	0·4826	0·4830	0·4834	0·4838	0·4842	0·4846	0·4850	0·4854	0·4857
2·2	0·4861	0·4864	0·4868	0·4871	0·4875	0·4878	0·4881	0·4884	0·4887	0·4890
2·3	0·4893	0·4896	0·4898	0·4901	0·4904	0·4906	0·4909	0·4911	0·4913	0·4916
2·4	0·4918	0·4920	0·4922	0·4925	0·4927	0·4929	0·4931	0·4932	0·4934	0·4936
2·5	0·4938	0·4940	0·4941	0·4943	0·4945	0·4946	0·4948	0·4949	0·4951	0·4952
2·6	0·4953	0·4955	0·4956	0·4957	0·4959	0·4960	0·4961	0·4962	0·4963	0·4964
2·7	0·4965	0·4966	0·4967	0·4968	0·4969	0·4970	0·4971	0·4972	0·4973	0·4974
2·8	0·4974	0·4975	0·4976	0·4977	0·4977	0·4978	0·4979	0·4979	0·4980	0·4981
2·9	0·4981	0·4982	0·4982	0·4983	0·4984	0·4984	0·4985	0·4985	0·4986	0·4986
3·0	0·4987	0·4987	0·4987	0·4988	0·4988	0·4989	0·4989	0·4989	0·4990	0·4990
3·1	0·4990	0·4991	0·4991	0·4991	0·4992	0·4992	0·4992	0·4992	0·4993	0·4993
3·2	0·4993	0·4993	0·4994	0·4994	0·4994	0·4994	0·4994	0·4995	0·4995	0·4995
3·3	0·4995	0·4995	0·4995	0·4996	0·4996	0·4996	0·4996	0·4996	0·4996	0·4997
3·4	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4997	0·4998

جدول (2)

تـــوزيـــع (t)

PERCENTAGE POINTS OF THE t-DISTRIBUTION

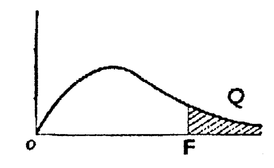


One Tail / Two Tails } Q%	5 / 10	2·5 / 5	1 / 2	0·5 / 1	0·1 / 0·2	0·05 / 0·1
$\nu =$ 1	6·31	12·71	31·82	63·66	318·3	636·6
2	2·92	4·30	6·96	9·92	22·33	31·60
3	2·35	3·18	4·54	5·84	10·21	12·92
4	2·13	2·78	3·75	4·60	7·17	8·61
5	2·02	2·57	3·36	4·03	5·89	6·87
6	1·94	2·45	3·14	3·71	5·21	5·96
7	1·89	2·36	3·00	3·50	4·79	5·41
8	1·86	2·31	2·90	3·36	4·50	5·04
9	1·83	2·26	2·82	3·25	4·30	4·78
10	1·81	2·23	2·76	3·17	4·14	4·59
12	1·78	2·18	2·68	3·05	3·93	4·32
15	1·75	2·13	2·60	2·95	3·73	4·07
20	1·72	2·09	2·53	2·85	3·55	3·85
24	1·71	2·06	2·49	2·80	3·47	3·75
30	1·70	2·04	2·46	2·75	3·39	3·65
40	1·68	2·02	2·42	2·70	3·31	3·55
60	1·67	2·00	2·39	2·66	3·23	3·46
∞	1·64	1·96	2·33	2·58	3·09	3·29

جدول (3)

تـــوزيـــع (F) جانب واحد

PERCENTAGE POINTS OF THE F-DISTRIBUTION, ONE TAIL

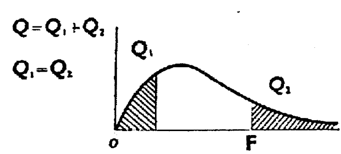


Q%	ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	∞
5	1	161·4	199·5	215·7	224·6	230·2	234·0	236·8	238·9	240·5	241·9	243·9	246·0	248·0	249·1	254·3
1		4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6366
5	2	18·51	19·00	19·16	19·25	19·30	19·33	19·35	19·37	19·38	19·40	19·41	19·43	19·45	19·45	19·50
1		98·50	99·00	99·17	99·25	99·30	99·33	99·36	99·37	99·39	99·40	99·42	99·43	99·45	99·46	99·50
5	3	10·13	9·55	9·28	9·12	9·01	8·94	8·89	8·85	8·81	8·79	8·74	8·70	8·66	8·64	8·53
1		34·12	30·82	29·46	28·71	28·24	27·91	27·67	27·49	27·35	27·23	27·05	26·87	26·69	26·60	26·13
5	4	7·71	6·94	6·59	6·39	6·26	6·16	6·09	6·04	6·00	5·96	5·91	5·86	5·80	5·77	5·63
1		21·20	18·00	16·69	15·98	15·52	15·21	14·98	14·80	14·66	14·55	14·37	14·20	14·02	13·93	13·46
5	5	6·61	5·79	5·41	5·19	5·05	4·95	4·88	4·82	4·77	4·74	4·68	4·62	4·56	4·53	4·36
1		16·26	13·27	12·06	11·39	10·97	10·67	10·46	10·29	10·16	10·05	9·89	9·72	9·55	9·47	9·02
5	6	5·99	5·14	4·76	4·53	4·39	4·28	4·21	4·15	4·10	4·06	4·00	3·94	3·87	3·84	3·67
1		13·75	10·92	9·78	9·15	8·75	8·47	8·26	8·10	7·98	7·87	7·72	7·56	7·40	7·31	6·88
5	7	5·59	4·74	4·35	4·12	3·97	3·87	3·79	3·73	3·68	3·64	3·57	3·51	3·44	3·41	3·23
1		12·25	9·55	8·45	7·85	7·46	7·19	6·99	6·84	6·72	6·62	6·47	6·31	6·16	6·07	5·65
5	8	5·32	4·46	4·07	3·84	3·69	3·58	3·50	3·44	3·39	3·35	3·28	3·22	3·15	3·12	2·93
1		11·26	8·65	7·59	7·01	6·63	6·37	6·18	6·03	5·91	5·81	5·67	5·52	5·36	5·28	4·86
5	9	5·12	4·26	3·86	3·63	3·48	3·37	3·29	3·23	3·18	3·14	3·07	3·01	2·94	2·90	2·71
1		10·56	8·02	6·99	6·42	6·06	5·80	5·61	5·47	5·35	5·26	5·11	4·96	4·81	4·73	4·31
5	10	4·96	4·10	3·71	3·48	3·33	3·22	3·14	3·07	3·02	2·98	2·91	2·85	2·77	2·74	2·54
1		10·04	7·56	6·55	5·99	5·64	5·39	5·20	5·06	4·94	4·85	4·71	4·56	4·41	4·33	3·91
5	11	4·84	3·98	3·59	3·36	3·20	3·09	3·01	2·95	2·90	2·85	2·79	2·72	2·65	2·61	2·40
1		9·65	7·21	6·22	5·67	5·32	5·07	4·89	4·74	4·63	4·54	4·40	4·25	4·10	4·02	3·60
5	12	4·75	3·89	3·49	3·26	3·11	3·00	2·91	2·85	2·80	2·75	2·69	2·62	2·54	2·51	2·30
1		9·33	6·93	5·95	5·41	5·06	4·82	4·64	4·50	4·39	4·30	4·16	4·01	3·86	3·78	3·36
5	13	4·67	3·81	3·41	3·18	3·03	2·92	2·83	2·77	2·71	2·67	2·60	2·53	2·46	2·42	2·21
1		9·07	6·70	5·74	5·21	4·86	4·62	4·44	4·30	4·19	4·10	3·96	3·82	3·66	3·59	3·17
5	14	4·60	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·76	2·70	2·65	2·60	2·53	2·46	2·39	2·35	2·13
1		8·86	6·51	5·56	5·04	4·69	4·46	4·28	4·14	4·03	3·94	3·80	3·66	3·51	3·43	3·00
5	15	4·54	3·68	3·29	3·06	2·90	2·79	2·71	2·64	2·59	2·54	2·48	2·40	2·33	2·29	2·07
1		8·68	6·36	5·42	4·89	4·56	4·32	4·14	4·00	3·89	3·80	3·67	3·52	3·37	3·29	2·87
5	16	4·49	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·66	2·59	2·54	2·49	2·42	2·35	2·28	2·24	2·01
1		8·53	6·23	5·29	4·77	4·44	4·20	4·03	3·89	3·78	3·69	3·55	3·41	3·26	3·18	2·75
5	17	4·45	3·59	3·20	2·96	2·81	2·70	2·61	2·55	2·49	2·45	2·38	2·31	2·23	2·19	1·96
1		8·40	6·11	5·18	4·67	4·34	4·10	3·93	3·79	3·68	3·59	3·46	3·31	3·16	3·08	2·65
5	18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·58	2·51	2·46	2·41	2·34	2·27	2·19	2·15	1·92
1		8·29	6·01	5·09	4·58	4·25	4·01	3·84	3·71	3·60	3·51	3·37	3·23	3·08	3·00	2·57
5	19	4·38	3·52	3·13	2·90	2·74	2·63	2·54	2·48	2·42	2·38	2·31	2·23	2·16	2·11	1·88
1		8·18	5·93	5·01	4·50	4·17	3·94	3·77	3·63	3·52	3·43	3·30	3·15	3·00	2·92	2·49
5	20	4·35	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2·51	2·45	2·39	2·35	2·28	2·20	2·12	2·08	1·84
1		8·10	5·85	4·94	4·43	4·10	3·87	3·70	3·56	3·46	3·37	3·23	3·09	2·94	2·86	2·42
5	21	4·32	3·47	3·07	2·84	2·68	2·57	2·49	2·42	2·37	2·32	2·25	2·18	2·10	2·05	1·81
1		8·02	5·78	4·87	4·37	4·04	3·81	3·64	3·51	3·40	3·31	3·17	3·03	2·88	2·80	2·36
5	22	4·30	3·44	3·05	2·82	2·66	2·55	2·46	2·40	2·34	2·30	2·23	2·15	2·07	2·03	1·78
1		7·95	5·72	4·82	4·31	3·99	3·76	3·59	3·45	3·35	3·26	3·12	2·98	2·83	2·75	2·31
5	23	4·28	3·42	3·03	2·80	2·64	2·53	2·44	2·37	2·32	2·27	2·20	2·13	2·05	2·01	1·76
1		7·88	5·66	4·76	4·26	3·94	3·71	3·54	3·41	3·30	3·21	3·07	2·93	2·78	2·70	2·26
5	24	4·26	3·40	3·01	2·78	2·62	2·51	2·42	2·36	2·30	2·25	2·18	2·11	2·03	1·98	1·73
1		7·82	5·61	4·72	4·22	3·90	3·67	3·50	3·36	3·26	3·17	3·03	2·89	2·74	2·66	2·21
5	∞	3·84	3·00	2·60	2·37	2·21	2·10	2·01	1·94	1·88	1·83	1·75	1·67	1·57	1·52	1·00
1		6·63	4·61	3·78	3·32	3·02	2·80	2·64	2·51	2·41	2·32	2·18	2·04	1·88	1·79	1·00

جدول (4)

تــــوزيـــــع (F) جانبين

PERCENTAGE POINTS OF THE F-DISTRIBUTION, TWO TAILS

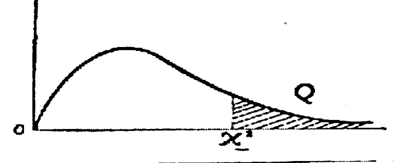


Q%	ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	∞
5	1	647·8	799·5	864·2	899·6	921·8	937·1	948·2	956·7	963·3	968·6	976·7	984·9	993·1	997·2	1018
1		16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25465
5	2	38·51	39·00	39·17	39·25	39·30	39·33	39·36	39·37	39·39	39·40	39·41	39·43	39·45	39·46	39.50
1		198·5	199·0	199·2	199·2	199·3	199·3	199·4	199·4	199·4	199·4	199·4	199·4	199·4	199·5	199·5
5	3	17·44	16·04	15·44	15·10	14·88	14·73	14·62	14·54	14·47	14·42	14·34	14·25	14·17	14·12	13·90
1		55·55	49·80	47·47	46·20	45·39	44·84	44·43	44·13	43·88	43·69	43·39	43·08	42·78	42·62	41 83
5	4	12·22	10·65	9·98	9·60	9·36	9·20	9·07	8·98	8·90	8·84	8·75	8·66	8·56	8·51	8·26
1		31·33	26·28	24·26	23·15	22·46	21·97	21·62	21·35	21·14	20·97	20·70	20·44	20·17	20·03	19·32
5	5	10·01	8·43	7·76	7·39	7·15	6·98	6·85	6·76	6·68	6·62	6·52	6·43	6·33	6·28	6·02
1		22·78	18·31	16·53	15·56	14·94	14·51	14·20	13·96	13·77	13·62	13·38	13·15	12·90	12·78	12·14
5	6	8·81	7·26	6·60	6·23	5·99	5·82	5·70	5·60	5·52	5·46	5·37	5·27	5·17	5·12	4·85
1		18·63	14·54	12·92	12·03	11·46	11·07	10·79	10·57	10·39	10·25	10·03	9·81	9·59	9·47	8.88
5	7	8·07	6·54	5·89	5·52	5·29	5·12	4·99	4·90	4·82	4·76	4·67	4·57	4·47	4·42	4·14
1		16·24	12·40	10·88	10·05	9·52	9·16	8·89	8·68	8·51	8·38	8·18	7·97	7·75	7·64	7·08
5	8	7·57	6·06	5·42	5·05	4·82	4·65	4·53	4·43	4·36	4·30	4·20	4·10	4·00	3·95	3·67
1		14·69	11·04	9·60	8·81	8·30	7·95	7·69	7·50	7·34	7·21	7·01	6·81	6·61	6·50	5·95
5	9	7·21	5·71	5·08	4·72	4·48	4·32	4·20	4·10	4·03	3·96	3·87	3·77	3·67	3·61	3·33
1		13·61	10·11	8·72	7·96	7·47	7·13	6·88	6·69	6·54	6·42	6·23	6·03	5·83	5·73	5·19
5	10	6·94	5·46	4·83	4·47	4·26	4·07	3·95	3·85	3·78	3·72	3·62	3·52	3·42	3·37	3·08
1		12·83	9·43	8·08	7·34	6·87	6·54	6·30	6·12	5·97	5·85	5·66	5·47	5·27	5·17	4·64
5	11	6·72	5·26	4·63	4·28	4·04	3·88	3·76	3·66	3·59	3·53	3·43	3·33	3·23	3·17	2·88
1		12·23	8·91	7·60	6·88	6·42	6·10	5·86	5·68	5·54	5·42	5·24	5·05	4·86	4·76	4·23
5	12	6·55	5·10	4·47	4·12	3·89	3·73	3·61	3·51	3·44	3·37	3·28	3·18	3·07	3·02	2·72
1		11·75	8·51	7·23	6·52	6·07	5·76	5·52	5·35	5·20	5·09	4·91	4·72	4·53	4·43	3·90
5	13	6·41	4·97	4·35	4·00	3·77	3·60	3·48	3·39	3·31	3·25	3·15	3·05	2·95	2·89	2·60
1		11·37	8·19	6·93	6·23	5·79	5·48	5·25	5·08	4·94	4·82	4·64	4·46	4·27	4·17	3·65
5	14	6·30	4·86	4·24	3·89	3·66	3·50	3·38	3·29	3·21	3·15	3·05	2·95	2·84	2·79	2·49
1		11·06	7·92	6·68	6·00	5·56	5·26	5·03	4·86	4·72	4·60	4·43	4·25	4·06	3·96	3·44
5	15	6·20	4·77	4·15	3·80	3·58	3·41	3·29	3·20	3·12	3·06	2·96	2·86	2·76	2·70	2·40
1		10·80	7·70	6·48	5·80	5·37	5·07	4·85	4·67	4·54	4·42	4·25	4·07	3·88	3·79	3·26
5	16	6·12	4·69	4·08	3·73	3·50	3·34	3·22	3·12	3·05	2·99	2·89	2·79	2·68	2·63	2·32
1		10·58	7·51	6·30	5·64	5·21	4·91	4·69	4·52	4·38	4·27	4·10	3·92	3·73	3·64	3·11
5	17	6·04	4·62	4·01	3·66	3·44	3·28	3·16	3·06	2·98	2·92	2·82	2·72	2·62	2·56	2·25
1		10·38	7·35	6·16	5·50	5·07	4·78	4·56	4·39	4·25	4·14	3·97	3·79	3·61	3·51	2·98
5	18	5·98	4·56	3·95	3·61	3·38	3·22	3·10	3·01	2·93	2·87	2·77	2·67	2·56	2·50	2·19
1		10·22	7·21	6·03	5·37	4·96	4·66	4·44	4·28	4·14	4·03	3·86	3·68	3·50	3·40	2·87
5	19	5·92	4·51	3·90	3·56	3·33	3·17	3·05	2·96	2·88	2·82	2·72	2·62	2·51	2·45	2·13
1		10·07	7·09	5·92	5·27	4·85	4·56	4·34	4·18	4·04	3·93	3·76	3·59	3·40	3·31	2·78
5	20	5·87	4·46	3·86	3·51	3·29	3·13	3·01	2·91	2·84	2·77	2·68	2·57	2·46	2·41	2·09
1		9·94	6·99	5·82	5·17	4·76	4·47	4·26	4·09	3·96	3·85	3·68	3·50	3·32	3·22	2·69
5	21	5·83	4·42	3·82	3·48	3·25	3·09	2·97	2·87	2·80	2·73	2·64	2·53	2·42	2·37	2·04
1		9·83	6·89	5·73	5·09	4·68	4·39	4·18	4·01	3·88	3·77	3·60	3·43	3·24	3·15	2·61
5	22	5·79	4·38	3·78	3·44	3·22	3·05	2·93	2·84	2·76	2·70	2·60	2·50	2·39	2·33	2·00
1		9·73	6·81	5·65	5·02	4·61	4·32	4·11	3·94	3·81	3·70	3·54	3·36	3·18	3·08	2·55
5	23	5·75	4·35	3·75	3·41	3·18	3·02	2·90	2·81	2·73	2·67	2·57	2·47	2·36	2·30	1·97
1		9·63	6·73	5·58	4·95	4·54	4·26	4·05	3·88	3·75	3·64	3·47	3·30	3·12	3·02	2·48
5	24	5·72	4·32	3·72	3·38	3·15	2·99	2·87	2·78	2·70	2·64	2·54	2·44	2·33	2·27	1·94
1		9·55	6·66	5·52	4·89	4·49	4·20	3·99	3·83	3·69	3·59	3·42	3·25	3·06	2·97	2·43
5	∞	5·02	3·69	3·12	2·79	2·57	2·41	2·29	2·19	2·11	2·05	1·94	1·83	1·71	1·64	1·00
1		7·88	5·30	4·28	3·72	3·35	3·09	2·90	2·74	2·62	2·52	2·36	2·19	2·00	1·90	1·00

جدول (5)

تـــوزيـــع (χ^2)

PERCENTAGE POINTS OF THE χ^2-DISTRIBUTION



ν \ %	10	5	2·5	1	0·1
1	2·706	3·841	5·024	6·635	10·83
2	4·605	5·991	7·378	9·210	13·82
3	6·252	7·816	9·351	11·35	16·27
4	7·780	9·488	11·14	13·28	18·47
5	9·236	11·07	12·83	15·08	20·51
6	10·64	12·59	14·45	16·81	22·46
7	12·02	14·07	16·02	18·49	24·36
8	13·36	15·51	17·53	20·09	26·13
9	14·68	16·92	19·02	21·67	27·89
10	15·99	18·31	20·48	23·21	29·59
11	17·28	19·68	21·92	24·72	31·26
12	18·55	21·03	23·34	26·22	32·91
13	19·81	22·36	24·74	27·69	34·51
14	21·06	23·68	26·12	29·14	36·12
15	22·31	25·00	27·49	30·58	37·70
16	23·54	26·30	28·85	32·00	39·25
17	24·77	27·59	30·19	33·41	40·79
18	25·99	28·87	31·53	34·81	42·31
19	27·20	30·14	32·85	36·19	43·82
20	28·41	31·41	34·17	37·57	45·32
21	29·62	32·67	35·48	38·93	46·80
22	30·81	33·92	36·78	40·29	48·27
23	32·01	35·17	38·08	41·64	49·73
24	33·20	36·42	39·36	42·98	51·18
25	34·38	37·65	40·65	44·31	52·62
26	35·56	38·89	41·92	45·64	54·05
27	36·74	40·11	43·19	46·96	55·48
28	37·92	41·34	44·46	48·28	56·89
29	39·09	42·56	45·72	49·59	58·30
30	40·26	43·77	46·98	50·89	59·70
40	51·81	55·76	59·34	63·69	73·42
50	63·17	67·50	71·42	76·15	86·66
60	74·40	79·08	83·30	88·38	99·61
70	85·53	90·53	95·02	100·4	112·3
80	96·58	101·9	106·6	112·3	124·8
90	107·6	113·1	118·1	124·1	137·2
100	118·5	124·3	129·6	135·8	149·5

جدول (6)

قيم معامل سبيرمان لأرتباط الرتب

CRITICAL VALUES OF SPEARMAN'S RANK CORRELATION COEFFICIENT (R)

$$R = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

Q% \ n	4	5	6	7	8	9	10
10	—	0·900	0·771	0·679	0·643	0·582	0·549
5	—	—	0·829	0·750	0·738	0·666	0·632

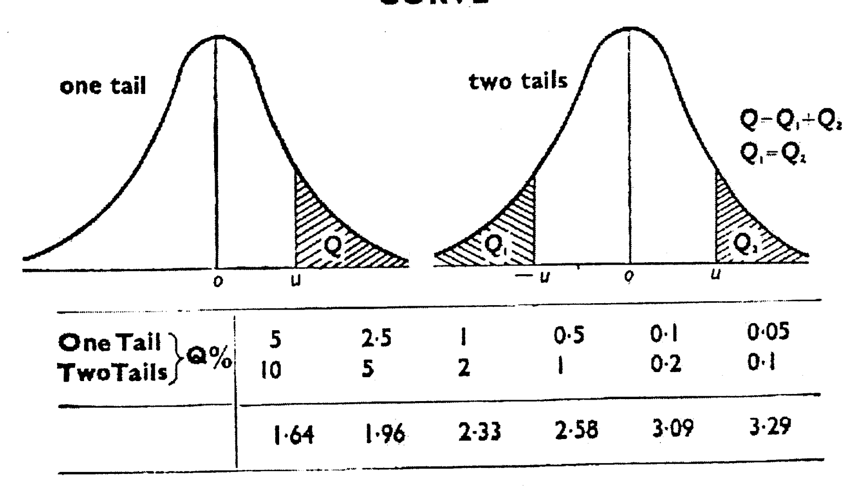
For $10 < n \leqslant 20$, $\frac{R}{\sqrt{1 - R^2}}\sqrt{n - 2}$ is distributed like t with $(n - 2)$ d.f.

For $n > 20$, $R\sqrt{n - 1}$ may be treated as normally distributed (0, 1).

جدول (7)

المنحنى الطبيعي المعياري

PERCENTAGE POINTS OF THE STANDARD NORMAL CURVE

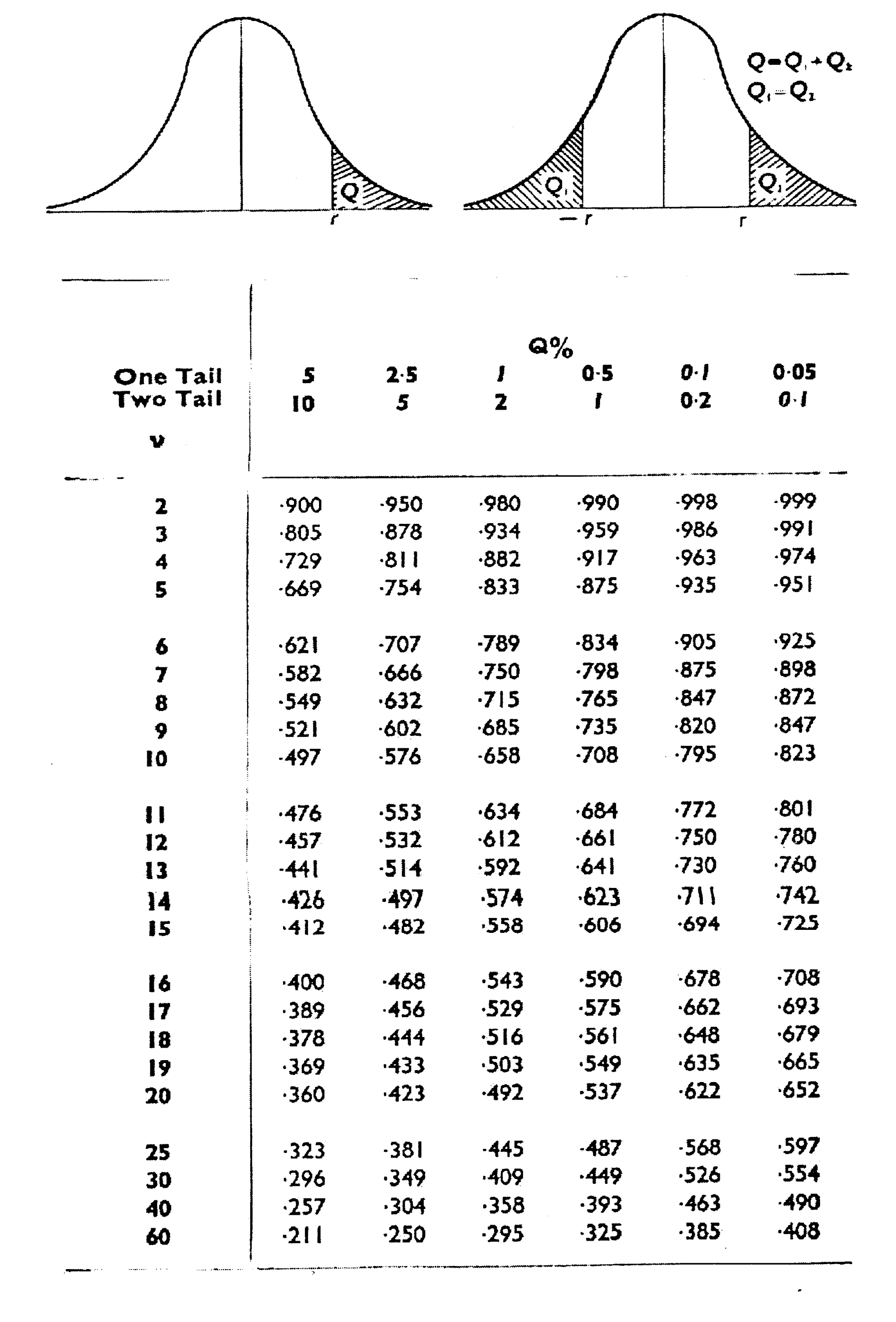


Q%						
One Tail	5	2·5	1	0·5	0·1	0·05
Two Tails	10	5	2	1	0·2	0·1
	1·64	1·96	2·33	2·58	3·09	3·29

جدول (8)

معامل الارتباط $(\rho = 0)$

PERCENTAGE POINTS OF THE CORRELATION COEFFICIENT
when $\rho = 0$



	Q%					
One Tail	5	2·5	1	0·5	0·1	0·05
Two Tail	10	5	2	1	0·2	0·1
ν						
2	·900	·950	·980	·990	·998	·999
3	·805	·878	·934	·959	·986	·991
4	·729	·811	·882	·917	·963	·974
5	·669	·754	·833	·875	·935	·951
6	·621	·707	·789	·834	·905	·925
7	·582	·666	·750	·798	·875	·898
8	·549	·632	·715	·765	·847	·872
9	·521	·602	·685	·735	·820	·847
10	·497	·576	·658	·708	·795	·823
11	·476	·553	·634	·684	·772	·801
12	·457	·532	·612	·661	·750	·780
13	·441	·514	·592	·641	·730	·760
14	·426	·497	·574	·623	·711	·742
15	·412	·482	·558	·606	·694	·725
16	·400	·468	·543	·590	·678	·708
17	·389	·456	·529	·575	·662	·693
18	·378	·444	·516	·561	·648	·679
19	·369	·433	·503	·549	·635	·665
20	·360	·423	·492	·537	·622	·652
25	·323	·381	·445	·487	·568	·597
30	·296	·349	·409	·449	·526	·554
40	·257	·304	·358	·393	·463	·490
60	·211	·250	·295	·325	·385	·408

جدول (9)

القيم الحرجة العليا والدنيا لأختبار ديربن – واتسون

Table 5 Critical Values for the Durbin-Watson Test: 5% Significance Level*

T	K = 2		K = 3		K = 4		K = 5		K = 6		K = 7		K = 8		K = 9		K = 10		K = 11	
	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*
6	0.610	1.400																		
7	0.700	1.356	0.467	1.896																
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287														
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588												
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822										
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645	0.203	3.005								
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149						
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266				
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360		
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.472	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.667	0.321	2.873	0.244	3.073
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.692	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.732	2.124	0.637	2.290	0.547	2.460	0.461	2.633	0.380	2.806
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.734
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.751	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.012	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.958	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.650	2.431
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.682	2.396
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.795	2.281
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.080	1.891	1.015	1.979	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.877	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.198
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.945	2.149
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802	1.401	1.837	1.369	1.873	1.337	1.910	1.305	1.948
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898
150	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.847	1.608	1.862	1.594	1.877
200	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.810	1.718	1.820	1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874

* K refers to the number of columns in X, including the constant term.

(continued)

(*continued*)

	$K = 12$		$K = 13$		$K = 14$		$K = 15$		$K = 16$		$K = 17$		$K = 18$		$K = 19$		$K = 20$		$K = 21$	
T	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*	d_L^*	d_U^*
16	0.098	3.503																		
17	0.138	3.378	0.087	3.557																
18	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603														
19	0.220	3.159	0.160	3.335	0.111	3.496	0.070	3.642												
20	0.263	3.063	0.200	3.234	0.145	3.395	0.100	3.542	0.063	3.676										
21	0.307	2.976	0.240	3.141	0.182	3.300	0.132	3.448	0.091	3.583	0.058	3.705								
22	0.349	2.897	0.281	3.057	0.220	3.211	0.166	3.358	0.120	3.495	0.083	3.619	0.052	3.731						
23	0.391	2.826	0.322	2.979	0.259	3.128	0.202	3.272	0.153	3.409	0.110	3.535	0.076	3.650	0.048	3.753				
24	0.431	2.761	0.362	2.908	0.297	3.053	0.239	3.193	0.186	3.327	0.141	3.454	0.101	3.572	0.070	3.678	0.044	3.773		
25	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.983	0.275	3.119	0.221	3.251	0.172	3.376	0.130	3.494	0.094	3.604	0.065	3.702	0.041	3.790
26	0.508	2.649	0.438	2.784	0.373	2.919	0.312	3.051	0.256	3.179	0.205	3.303	0.160	3.420	0.120	3.531	0.087	3.632	0.060	3.724
27	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.859	0.348	2.987	0.291	3.112	0.238	3.233	0.191	3.349	0.149	3.460	0.112	3.563	0.081	3.658
28	0.578	2.555	0.510	2.680	0.445	2.805	0.383	2.928	0.325	3.050	0.271	3.168	0.222	3.283	0.178	3.392	0.138	3.495	0.104	3.592
29	0.612	2.515	0.544	2.634	0.479	2.755	0.418	2.874	0.359	2.992	0.305	3.107	0.254	3.219	0.208	3.327	0.166	3.431	0.129	3.528
30	0.643	2.477	0.577	2.592	0.512	2.708	0.451	2.823	0.392	2.937	0.337	3.050	0.286	3.160	0.238	3.266	0.195	3.368	0.156	3.465
31	0.674	2.443	0.608	2.553	0.545	2.665	0.484	2.776	0.425	2.887	0.370	2.996	0.317	3.103	0.269	3.208	0.224	3.309	0.183	3.406
35	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521	0.604	2.619	0.547	2.716	0.492	2.813	0.439	2.910	0.388	3.005	0.340	3.099	0.295	3.190
36	0.808	2.306	0.748	2.398	0.689	2.492	0.631	2.586	0.575	2.680	0.520	2.774	0.467	2.868	0.417	2.961	0.369	3.053	0.323	3.142
37	0.831	2.285	0.772	2.374	0.714	2.464	0.657	2.555	0.602	2.646	0.548	2.738	0.495	2.829	0.445	2.920	0.397	3.009	0.351	3.097
38	0.854	2.265	0.796	2.351	0.739	2.438	0.683	2.526	0.628	2.614	0.575	2.703	0.522	2.792	0.472	2.880	0.424	2.968	0.378	3.054
39	0.875	2.246	0.819	2.329	0.763	2.413	0.707	2.499	0.653	2.585	0.600	2.671	0.549	2.757	0.499	2.843	0.451	2.929	0.404	3.013
40	0.896	2.228	0.840	2.309	0.785	2.391	0.731	2.473	0.678	2.557	0.626	2.641	0.575	2.724	0.525	2.808	0.477	2.892	0.430	2.974
45	0.988	2.156	0.938	2.225	0.887	2.296	0.838	2.367	0.788	2.439	0.740	2.512	0.692	2.586	0.644	2.659	0.598	2.733	0.553	2.807
50	1.064	2.103	1.019	2.163	0.973	2.225	0.927	2.287	0.882	2.350	0.836	2.414	0.792	2.479	0.747	2.544	0.703	2.610	0.660	2.675
55	1.129	2.062	1.087	2.116	1.045	2.170	1.003	2.225	0.961	2.281	0.919	2.338	0.877	2.396	0.836	2.454	0.795	2.512	0.754	2.571
60	1.184	2.031	1.145	2.079	1.106	2.127	1.068	2.177	1.029	2.227	0.990	2.278	0.951	2.330	0.913	2.382	0.874	2.434	0.836	2.487
65	1.231	2.006	1.195	2.049	1.160	2.093	1.124	2.138	1.088	2.183	1.052	2.229	1.016	2.276	0.980	2.323	0.944	3.371	0.908	2.419
70	1.272	1.986	1.239	2.026	1.206	2.066	1.172	2.106	1.139	2.148	1.105	2.189	1.072	2.232	1.038	2.275	1.005	2.318	0.971	2.362
75	1.308	1.970	1.277	2.006	1.247	2.043	1.215	2.080	1.184	2.118	1.153	2.156	1.121	2.195	1.090	2.235	1.058	2.275	1.027	2.315
80	1.340	1.957	1.311	1.991	1.283	2.024	1.253	2.059	1.224	2.093	1.195	2.129	1.165	2.165	1.136	2.201	1.106	2.238	1.076	2.275
85	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315	2.009	1.287	2.040	1.260	2.073	1.232	2.105	1.205	2.139	1.177	2.172	1.149	2.206	1.121	2.241
90	1.395	1.937	1.369	1.966	1.344	1.995	1.318	2.025	1.292	2.055	1.266	2.085	1.240	2.116	1.213	2.148	1.187	2.179	1.160	2.211
95	1.418	1.929	1.394	1.956	1.370	1.984	1.345	2.012	1.321	2.040	1.296	2.068	1.271	2.097	1.247	2.126	1.222	2.156	1.197	2.186
100	1.439	1.923	1.416	1.948	1.393	1.974	1.371	2.000	1.347	2.026	1.324	2.053	1.301	2.080	1.277	2.108	1.253	2.135	1.229	2.164
150	1.579	1.892	1.564	1.908	1.550	1.924	1.535	1.940	1.519	1.956	1.504	1.972	1.489	1.989	1.474	2.006	1.458	2.023	1.443	2.040
200	1.654	1.885	1.643	1.896	1.632	1.908	1.621	1.919	1.610	1.931	1.599	1.943	1.588	1.955	1.576	1.967	1.565	1.979	1.554	1.991

Source: This table is reproduced from N. E. Savin, and K. J. White, The Durbin-Watson Test for Serial Correlation with Extreme Sample Sizes or Many Regressors. *Econometrica*, 45; 1989-1996, 1977. With permission from The Econometric Society.

المصادر

أولا: المصادر العربية

1- د. أموري هادي كاظم (1988) ، **طرق القياس الاقتصادي**، الطبعة الأولى ، مطبعة التعليم العالي ، جامعة بغداد ، العراق.

2- د. أموري هادي كاظم والسيد سعيد المعلم (2001) ، **تقدير وتحليل نماذج الاستهلاك/ ما بين دوال أنجل ومنظومات الطلب** ، دار المناهج ، عمان ، الاردن.

3- د. أموري هادي كاظم و د. محمد حسين باقر (1985) ، **الأساليب الاحصائية في تقدير وتحليل الاستهلاك والدخل العائلي**، المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية، مطبعة الوطن ، لبنان.

4- د. أموري هادي كاظم و د. عصام خضير (1999) ، **طبيعة البيانات الإحصائية وبناء النماذج القياسية**، دار وائل للنشر ، عمان ، الأردن.

5- د. أموري هادي كاظم والسيد محمد مناجد (1988) ، **مقدمة في تحليل الانحدار** ، مطبعة جامعة الموصل ، العراق.

6- د. محمد خليل برعي (1983)، **مقدمة في القياس الاقتصادي** ، مكتبة نهضة الشرق، جامعة القاهرة، جمهورية مصر العربية.

7- د.عصام عزيز شريف (1983) ، **مقدمة في القياس الاقتصادي**، الطبعة الثالثة ، دار الطليعة ، لبنان.

ثانيا : المصادر الأجنبية

1. Bridge J.L. (1971). **Applied econometrics**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London.

2. Chist. C. (1970). **Econometric Model and Methods**. Wiley Eastern Private Limited Publishers.

3. Chow. G.C. (1983). **Econometrics**, International Student Editions, London, Tokyo.

4. Eengel, R.F. (1995). ARCH: Selected Readings. **Advanced Texts in Econometrics**. Oxford and New York: Oxford University Press.

5. Goldberger, A.S. **Econometric Theory**, New York, Wiley, (1964).

6. Greene, W.H.(1997). **Econometric Analysis**. Upper Sddle River, NJ: Prentice-Hall.

7. Harvey, A.C. (1990). **The Econometric Analysis of Time series**. Cambridge, Mass.: The MIT Press.

8. Intriligator, M.D. (1978). **Econometrics Models Techniques and Application**, North-Holland Publishing Company, Oxford.

9. James, O. Berer (1985). **Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis**. Second Edition, Springer – Veriag, New York

10. Johnston, J. (1984). **Econometric Methods**, International Student Edition, London, Sydney, Tokyo.

11. Klein. L.R. (1972). **An Introduction to Econometric**, Macmillan Company, New York.

12. Kmenta, J. (1986). **Elements of Econometrics**, Macmillan Company, New York.

13. Koutsoyiannis, A. (1977). **Theory of Econometrics**, Macmillan Company.

14. Lapin, L.L. (1993). **Statistics for Modern Business Decisions**. 6^{th} ed. Fort Worth, Tex.: The Dryden Press.

15. Lee, B.J., **A Heteroscedasticity Test Robust to Conitional Mean Specification**. Econometrica 60(1) (January, 1992): 159-171.

16. Lindgren, B.W., (1976), **Statistical Theory**, Third Edition, Mac Millan Publishing, Co. Inc., New York.

17. Maddala, G.S. (1977). **Econometrics**, International Student Edition, Tokyo.

18. Martz, H.F. & Krutchkoff, R.G., (1969), **Empirical Bayes Estimators in a Multiple Linear Regression Model**, Biometrika, Vol.56, No.2, pp.367.

19. Mood, A.M., Graybill, F.A. & Boes, B.C., (1985), **Introduction to the Theory of Statistics**, 3rd ed., McGra-Hill Inc.

20. Ramanathan, R. (1992). **Introduction to Econometrics with Applications**. 2^{nd} ed. Fort Worth: The Dryden Press.

21. Ramanathan, R. (1993). **Statistical Methods in Econometrics**. San Diego: Academic Press.

22. Ramu, R. (1998). **Introductory Econometrics with Application**, 4^{th} ed., The Dryden Press, New York, London.

23. Roa, P. and Miller, R.L. **Applied Econometrics**, Prentice – Hall of India Private Limited, New Delhi, (1972).

24. Robert. S.P. and Daniel L.R. (1981), **Econometric Models and Economic Forecasts, International Student Edition**, London, Sydney, Tokyo.

25. Spanos, A. On Modeling Heteroscedasticity: **The Student's and Elliptical Linear Regression Models**. Econometric Theory 10 (2) (June 1994): 286-315.

26. Terry, E.D. and Neeley, M/J. (1988). **Pooled Cross-Sectional and Time Series Data Analysis**, Marcel Dekker Inc. New York.



27. Theil, H. (1966), **Applied Economic Forecasting**, Amsterdam, North-Holland Publishing Co.

28. Tinbergen, J., (1957), **Econometrics**, New York, The Blakiste Co.

29. Vireudra, K.S. and David, E.A.G. (1987), **Seemingly Unrelated Regression Equations Model/ Estimation and Inference**, Marcel Dekker, INC. New York.

30. Wilks, S.S. (1962). **Mathematical Statistics**, New York, John Wiley and Sons.

31. Wold, H.O.A. (1964). **Econometric Model Building**, Amsterdam, North – Holland Publishing Co.

32. Wonnacatt, T.H., and Wonnacott. R.J. (1990), **Introductory Statistics for Business and Economics**. New York: Wiley.

33. Wonnacott, R.J. and Wonnacatt, T.H. (1979). **Econometrics**, New York, John Wiley and Sons.

34. Zellner, A., (1971), **An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics**, John Wiley & Sons, Inc.

35. Zellner, Arnold, and H[enri] Theil (1962). **Three-Stages Least Squares: Simultaneous Estimation of /simultaneous Equations**, Econometrica, Vol.30, No.1 (January), pp.54-78.

36. Zellner, Arnold, and V. Karuppan Chetty (1965). **Prediction and Decision Problems in Regression Models from the Bayesian Point of View**, JASA., Vol.60, No.310 (June), pp.608-616.